AC10 - Analisi Complessa

Esonero 1
16 Dicembre 2010

COGNOME e NOME e numero matricola:

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 1. Vero o falso? *Giustificare con precisione la risposta.*

(1) Se una funzione intera ha un insieme infinito di zeri, allora è costante.

(2) Sia $f(z)$ una funzione intera tale che $f(z) = 0$ per ogni z numero reale appartenente all'intervallo $(0, 1)$. Allora $f(z)$ è identicamente nulla.

(3) Sia $f(z)$ una funzione intera tale che $f'(z) = 0$ per ogni z numero razionale. Allora $f(z)$ è costante.

(4) Se una funzione intera ha un numero finito di zeri, allora è un polinomio

Problema 2. Sia f una funzione intera vista come applicazione da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$. Si dimostrino le affermazioni seguenti.

(1) Se esiste $a \in \mathbb{C}$ tale che a non appartiene a $f(\mathbb{C})$ allora f ha una singolarità essenziale nel punto all'infinito.

(2) Sia $R \subset \mathbb{C}$ una retta fissata. Se $f(\mathbb{C}) \cap R = \emptyset$ allora f è costante.

Problema 3. Si consideri la funzione

$$\frac{(z+1)^2 \sin \pi z}{z+\sqrt{2}}$$

definita sulla sfera di Riemann $\mathbb{C} \cup \infty$. Se ne classifichino gli zeri e le singolarità isolate, indicando l'ordine di zeri e poli, e si calcoli il residuo per gli eventuali poli.

Problema 4. Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^3}$$

dove γ è il cerchio $\{z : |z-1| = 1\}$ percorso una volta in senso orario.

Problema 5. Sviluppare in serie di Laurent nel punto $z = 1$ la funzione

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$$

determinare la regione di convergenza della serie.