Esercitazione del corso AC310

9 Dicembre 2010

**1.** Sia $R(X,Y) = \frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$ una funzione razionale tale che $Q(X,Y)$ non si annulli per $X^2+Y^2=1$. Dimostrare che

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = 2\pi i \sum_{|a|<1} \operatorname{Res}_a f$$

dove

$$f(z) = \frac{1}{iz}\frac{P\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}{Q\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}.$$

**2.** Mostrare che

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos t + a^2}dt = \frac{2\pi}{1-a^2}$, $(|a|<1)$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3t}{5-3\cos t}dt = 0$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos t)^2}dt = \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2-b^2}^3}$, $(a>b>0)$.

**3.** Sia $R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ una funzione razionale tale che $\deg Q(X) \geq 2 + \deg P(X)$. Dimostrare che se $Q(X)$ non ha radici reali allora:

$$\lim_{\rho\to+\infty} \int_{-\rho}^{\rho} R(t)dt = 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}_a R(z)$$

dove $\mathbb{H}$ denota il semipiano superiore.

**4.** Mostrare che

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^6}dt = \frac{\pi}{3}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}dt = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$, $(a,b>0)$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{(t^2+4t+5)^2}dt = \pi$