Esercitazione del corso AC310

11 Novembre 2010

A) Esercizi svolti in classe

1) Sia f una funzione olomorfa in Ω, C una cerchio contenuto in Ω e consideriamo un punto $a \in \Omega$ interno a C. Sia f_n la funzione definitia ricorsivamente come segue $f(z) = f(a) + (z-a)f_1(z)$; $f_1(z) = f_1(a) + (z-a)f_2(z)$; $\ldots$; $f_{n-1}(z) = f_{n-1}(a) + (z-a)f_n(z)$

Allora
$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}d\zeta$$

2) Verificare che l'ordine algebrico di una funzione f in un punto a (in simboli $\mathrm{ord}_a(f)$ verifica le seguenti relazioni:

(1) $\mathrm{ord}_a(fg) = \mathrm{ord}_a(f) + \mathrm{ord}_a(g)$
(2) $\mathrm{ord}_a(f/g) = \mathrm{ord}_a(f) - \mathrm{ord}_a(g)$
(3) $\mathrm{ord}_a(f+g) \leq \max\{\mathrm{ord}_a(f), \mathrm{ord}_a(g)\}$

3) Dimostrare che una funzione analitica su tutto il piano complesso che non abbia una singolarità essenziale all'infinito risulta essere un polinomio.

4) Dimostrare che le funzioni e^z, $\sin z$ e $\cos z$ hanno una singolarità essenziale all'infinito.

B) Esercizi assegnati per casa

1) Dimostrare che una funzione meromorfa sul piano complesso esteso è una funzione razionale (cioè è il quoziente di due polinomi).