Esercitazione del corso AC310

25 Novembre 2010

## A) Esercizi svolti in classe

1. (Lemma di Schwarz) Sia $f$ una funzione olomorfa in $|z| < 1$, se $f(0) = 0$ e $|f(z)| < 1$ per ogni $|z| < 1$, allora $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $|z| < 1$ e $|f(0)| \leq 1$, inoltre se $|f(z_0)| = |z_0|$ per qualche $z_0$ allora $f(z) = cz$.

2) Sia $f$ una funzione olmorfa per $|z| < R$ e suppuniamo che $f(0) = 0$ e $|f(z)| < M$. Allora $|f(z)| \leq \frac{M|z|}{R}$ per ogni $|z| < R$.

3) Calcolare i seguenti integrali

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{az}}{z^2(z^2+2z+2)}$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^{az}}{(e^z+1)(e^{z-1}+1)}$$

dove $\gamma$ è il rettangolo di vertici $v_1 = -\frac{1}{2} + (\pi - \frac{1}{2})i$, $v_2 = \frac{3}{2} + (\pi - \frac{1}{2})i$, $v_3 = \frac{3}{2} + (\pi + \frac{1}{2})i$, $v_4 = -\frac{1}{2} + (\pi + \frac{1}{2})i$

### Funzione Ellittiche

1) Sia $f$ una funzione meromorfa, periodica e non costante e sia $\Lambda_f$ il gruppo additivo dei sui periodi. Dimostrare che:

- $\inf_{\omega \in \Lambda_f} |\omega| =: \delta > 0$
- $\Lambda_f$ non ha punti di accumulazione in $\mathbb{C}$

2) Sia $f$ una funzione meromorfa, periodica e non costante e sia $\Lambda_f$ l gruppo additivo dei sui periodi. Allora $\Lambda_f = \omega\mathbb{Z}$ (ed in questo caso $f$ si dice semplicemente periodica), oppure esistono $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda_f$, linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$, tali che ogni periodo $\omega \in \Lambda_f$ si ha che $\omega = n\omega_1 + m\omega_2$, con $n, m \in \mathbb{Z}$, (cioè $\Lambda_f$ è un reticolo in $\mathbb{C}$). In questo secondo caso $f$ si dice doppiamente periodica.

3) Le funzioni meromorfe su tutto $\mathbb{C}$ e doppiamente periodiche sono dette funzioni *ellittiche*. Dimostrare che se $f$ è una funzione ellittica olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ allora $f$ è costante. Dimostrare inoltre che se $f$ e $g$ hanno lo stesso reticolo dei periodi, gli stessi poli e gli stessi zeri (tutti contati con le loro rispettive molteplicità) allora $f(z) = \lambda g(z)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$.

## B) Esercizi proposti

1) Sia $M(\Lambda)$ l'insieme delle funzioni ellittiche con reticolo dei periodi $\Lambda$, dimostrare che $M(\Lambda)$ è un campo.