Esercitazione del corso AC310

2 Dicembre 2010

1. Sviluppare in serie di Taylor centrata in zero le funzioni $(z+1)^\mu$ (con μ razionale) e $\log(1+z)$.

2. Sia $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$, con $0 < |a| < |b|$

(a) Determinare le serie di Laurant di f centrate in zero sui seguenti insiemi

(a1) Il disco di raggio $|a|$.
(a2) L'anello di raggi $R_1 = |a|$ e $R_2 = |b|$
(a3) L'anello di raggi $R_1 = |b|$ e $R_2 = +\infty$ (cioè l'insieme $\{z\in\mathbb{C} \,|\, |z| > |b|\}$.

(b) Determinare le serie di Laurant di f centrate in $z = a$ sui seguenti insiemi
(b1) L'anello di raggi $R_1 = 0$ e $R_2 = |a - b|$
(b2) L'anello di raggi $R_1 = |a - b|$ e $R_2 = +\infty$.

3. Sia

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^3(z+2)^2}.$$

(a) Calcolare i coefficenti dei termini non polinomiali della serie di Laurant di f intorno a $z = i$.
(b) Calcolare i coefficenti dei termini non polinomiali delle serie di Laurant di f intorno a $z = -2$.

4. Determinare lo sviluppo in serie di Laurant nel singolarità indicata delle seguenti funzioni:

(a) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^3}$, $z = 1$.
(b) $f(z) = (z-3)\sin\left(\dfrac{1}{z+2}\right)$, $z = -2$.

5 (Abel) Dimostrare che se $f(z)$ una funzione ellittica non costante, avente nel parellogramma fondamentale $\Pi = \{x\omega_1 + y\omega_2 + c \;:\; x, y\in\mathbb{R}, 0 \leq x, y < 1\}$ gli zeri $z_1, \ldots, z_t$ ed i poli $p_1, \ldots, p_r$ ognuno di essi essendo ripetuto secondo la sua molteplicità. Allora si ha $t = r$ e

$$\sum_{j=1}^{r} z_j \equiv \sum_{j=1}^{r} p_j \qquad (\mathrm{mod}\,\Lambda)\,.$$