Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. L. Caporaso

Tutori: Luca Schaffler e Dario Spirito

TUTORATO 1
29 SETTEMBRE 2010

1. Verificare che i e $-i$ sono gli unici numeri complessi il cui opposto e inverso coincidono.

   <u>*Soluzione*</u>: La condizione si riduce a $-x = \frac{1}{x}$, ovvero $x^2 + 1 = 0$, che ha soluzioni i e $-i$.

2. Calcolare:

   a) $(2+i)^{-1}$
   b) $(4+6i)^{-1}$
   c) $(3+\sqrt{2}i)^{-1}$
   d) $(9\pi - 2i)^{-1}$
   e) $(4+i)(1-2i)$
   f) $i(1+i)^{-1}$
   g) $(2-3i)^3$
   h) $(1+i)^n + (1-i)^n$
   i) $\sqrt{i}$
   j) $\sqrt{1-i}$
   k) $\sqrt{(2+3i)(-3+i)^{-1}}$

   <u>*Soluzione*</u>: I primi sette sono semplici applicazioni della regola dell'inverso e dello svolgimento dei calcoli dopo la divisione in parte reale e parte immaginaria:

   a) $\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$
   b) $\frac{1}{13} - \frac{3}{26}i$
   c) $\frac{3}{11} - \frac{\sqrt{2}}{11}i$
   d) $\frac{9\pi}{81\pi^2+4} + \frac{2}{81\pi^2+4}i$
   e) $6-7i$
   f) $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$
   g) $-46-9i$

   h) Usando la notazione trigonometrica $z = |z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ (dove θ è l'angolo compreso tra il semiasse reale positivo e il vettore Oz) e la formula di De Moivre $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ si ha

   $$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

   $$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

   e quindi la loro somma è

   $$2\sqrt{2}\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} 2 & n \equiv 1,7 \bmod 8 \\ 0 & n \equiv 2,4,6,0 \bmod 8 \\ -2 & n \equiv 3,5 \bmod 8 \end{cases}$$

i) Usando ancora la notazione trigonometrica si ha

$$\sqrt{i} = \pm\sqrt{|i|\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)} = \pm\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$$

j) Allo stesso modo

$$\sqrt{1-i} = \sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

k) $(2+3i)(-3+i)^{-1} = \frac{-3}{10} - \frac{11}{10}i = \frac{1}{10}(-3-11i)$ e quindi

$$\sqrt{(2+3i)(-3+i)^{-1}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\sqrt{130}(\cos\theta + i\sin\theta) = \pm\sqrt{13}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove $2\theta = \arctan\left(\frac{11}{3}\right)$

3. Trovare la parte reale ed immaginaria delle seguenti espressioni:

a) $\dfrac{z-1}{z+6}$

b) z^3

c) $\dfrac{z^2}{z+i}$

d) $\cos(z)$

<u>*Soluzione*</u>: Porremo $z = x + iy$.

a)
$$\frac{z-1}{z+6} = \frac{x+iy-1}{x+iy+6} = \frac{x-1+iy}{x+6+iy}\cdot\frac{x+6-iy}{x+6-iy} =$$
$$= \frac{(x-1)(x+6) - iy(x-1) + iy(x+6) + y^2}{(x+6)^2+y^2} = \frac{x^2+5x-6+y^2+7iy}{(x+6)^2+y^2}$$

dunque:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+6}\right) = \frac{x^2+5x-6+y^2}{(x+6)^2+y^2}$$
$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z+6}\right) = \frac{7y}{(x+6)^2+y^2}$$

b)
$$\frac{z^2}{z+i} = \frac{x^2-y^2+2xyi}{x+i(y+1)}\cdot\frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)} =$$
$$= \frac{x(x^2-y^2) - i(y+1)(x^2-y^2) + 2x^2yi + 2xy(y+1)}{x^2+(y+1)^2} =$$
$$= \frac{x^3+xy^2+2xy+i(yx^2+y^3-x^2+y^2)}{x^2+(y+1)^2}$$

dunque:

$$\text{Re}\left(\frac{z^2}{z+i}\right) = \frac{x^3+xy^2+2xy}{x^2+(y+1)^2}$$

$$\text{Im}\left(\frac{z^2}{z+i}\right) = \frac{(yx^2+y^3-x^2+y^2)}{x^2+(y+1)^2}$$

c)

$$\text{Re}\left(z^3\right) = x^3-3xy^2$$

$$\text{Im}\left(z^3\right) = -y^3+3x^2y$$

d) Sfruttando che $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{iz} = \cos z + i\sin z$:

$$\cos z = \text{Re}(e^{iz}) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{ix-y}+e^{-ix+y}) = \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)) =$$

$$= \cos x\frac{e^y+e^{-y}}{2} - i\sin x\frac{e^y-e^{-y}}{2} = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y \Rightarrow$$

$$\text{Re}(\cos z) = \cos x\cosh y$$

$$\text{Im}(\cos z) = -\sin x\sinh y$$

4. a) Dimostrare che, se esiste un $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tale che $z^n = 1$, allora z è sul cerchio unitario.

   b) Dimostrare che, se $\lim_{n\to+\infty} z^n = 1$, allora $z = 1$.

   c) Esistono numeri complessi tali che $\lim_{n\to+\infty} z^n = -1$?

<u>*Soluzione*</u>:

a) $|z^n| = |z|^n$, quindi se $z^n = 1$ si ha $|z|^n = 1$, ed essendo $|z|$ reale positivo dev'essere 1, cioè |z| è sul cerchio unitario.

b) Poiché $r^n \to \infty$ se $r > 1$ e $r^n \to 0$ se $r \in (0,1)$, si deve avere $|z| = 1$. Poiché $z^n \to 1$, per ogni $\epsilon > 0$ l'argomento principale (compreso tra $-\pi$ e π) di z^n è definitivamente in $(-\epsilon,\epsilon)$; sia N siffatto. Anche z^{N+1} ha argomento in questo intervallo, e quindi z deve avere argomento in $(-2\epsilon,2\epsilon)$. Avvenendo questo per ogni valore di ϵ, l'unica possibilità è che $z = 1$.

c) Ragionando analogamente al punto precedente (ma considerando l'argomento principale compreso in $[0,2\pi)$ e la successione definitivamente in $(\pi-\epsilon,\pi+\epsilon)$) si ottiene come unica possibilità $z = -1$; ma $(-1)^n$ non ha limite, e quindi la proprietà non è mai verificata.

5. Sia $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, tale che non esiste nessun $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $z^n = 1$. Dimostrare che per ogni w di norma unitaria esiste una successione $\{n_k\}$ tale che $z^{n_k} \to w$. Dedurne che l'insieme dei punti limite di $\{\cos(n\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è $[-1, 1]$ per ogni θ che non è un multiplo razionale di π.

   Soluzione: Dimostriamo preliminarmente che esiste una sottosucessione che tende a 1. Sia $A = \{z^n | z \in \mathbb{N}\backslash\{\,0\}\}$. A è infinito (perché altrimenti esistono $j > k$ tali che $z^j = z^k$ e quindi $z^{j-k} = 1$, contro l'ipotesi che z non sia una radice dell'unità), ed essendo contenuto nel compatto (chiuso e limitato) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ ammette un punto limite w. Sia n_k tale che $z^{n_k} \to w$, e sia $m_k = n_{k+1} - n_k$. Si ha

$$\lim_{k\to+\infty} z^{m_k} = \lim_{k\to+\infty} z^{n_{k+1}-n_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{z^{n_{k+1}}}{z_{n_k}} = \frac{\lim_{k\to+\infty} z^{n_{k+1}}}{\lim_{k\to+\infty} z_{n_k}} = \frac{w}{w} = 1$$

   Sia ora w un qualunque numero complesso di norma unitaria, e sia $\theta \in [0, 2\pi)$ il suo argomento. Non essendo un punto limite di $\{z^n\}$, esiste un ϵ tale che nessun z^n ha argomento in $(\theta - \epsilon, \theta + \epsilon) \subset [0, 2\pi)$; per il punto precedente, tuttavia, esiste un N tale che z^N ha argomento minore di ϵ, e una sua potenza necessariamente ricade in $(\theta - \epsilon, \theta + \epsilon)$, contro l'ipotesi.

   Se θ è l'argomento di z, $\cos(n\theta)$ è la parte reale di z^n; per ogni $x \in [-1, 1]$, la successione n_k tale che $\cos(n_k\theta) \to x$ sarà quella tale che z^{n_k} tende a uno dei due complessi di norma unitaria la cui parte reale è x.

6. Sia $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che, con la somma e il prodotto tra matrici, A è un campo isomorfo a $\mathbb{C}$. Cosa rappresenta il determinante?

   Soluzione: È facile vedere che A è un anello, e definendo $\phi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ come $\phi \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a + ib$, si ottiene un omomorfismo suriettivo di anelli (la verifica è diretta) di nucleo $\{0\}$, ovvero un isomorfismo. Il determinante $a^2 + b^2$ è il quadrato della norma del numero complesso $a + ib$, e la moltiplicatività del determinante corrisponde alla moltiplicatività della norma.

7. Dimostrare che l'equazione $|z - a| + |z + a| = 2|c|$ ha soluzioni se e solo se $|a| \leq |c|$.

   Soluzione: $|z - a|$ e $|z + a|$ rappresentano rispettivamente la distanza di z da a e da $-a$; l'equazione rappresenta quindi (geometricamente) un'ellisse di fuochi a e $-a$ con somma delle distanze pari a $2|c|$, e quindi ha soluzioni se e solo se l'ellisse esiste, il che avviene se e solo se $|a| \leq |c|$.

8. Siano z e w numeri complessi. Dimostrare che l'area del triangolo Ozw è $\frac{1}{2}|\operatorname{Im}(z\overline{w})|$.

   Soluzione: Se z è reale positivo, allora l'area del triangolo è data da $\frac{1}{2}z$ per l'altezza del triangolo, ovvero $|\operatorname{Im}(w)| = |\operatorname{Im}(\overline{w})|$; inoltre $\frac{1}{2}z|\operatorname{Im}(\overline{w})| = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(z\overline{w})|$ ancora perché z è reale. Ogni triangolo può essere ruotato attorno all'origine fino a che uno dei punti sia sul semiasse reale positivo; ruotando di α si ha

$$A = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(\alpha z\overline{\alpha w})| = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(\alpha\overline{\alpha}z\overline{\alpha w})| = |\operatorname{Im}(z\overline{w})|$$

perché α è sul cerchio unitario.

9. Dimostrare che la composizione di due funzioni olomorfe è ancora olomorfa.

   Soluzione: La dimostrazione ricalca esattamente quella nel caso reale:

$$\lim_{w\to 0} \frac{g(f(z+w)) - g(f(z))}{w} = \lim_{w\to 0} \frac{g(f(z+w)) - g(f(z))}{f(z+w) - f(z)} \cdot \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$$

   e poiché $f(z+w) - f(z) \to 0$ (f è olomorfa, quindi in particolare continua) il limite può essere spezzato in

$$\lim_{w\to 0} \frac{g(f(z+w)) - g(f(z))}{f(z+w) - f(z)} \lim_{w\to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} = g'(f(z))f'(z)$$

   e in particolare $g \circ f$ è olomorfa.

10. Determinare la funzione coniugata di:

    a) $\cos x \cosh y$
    b) $\cos(x)e^{-y}$
    c) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
    d) $\ln(x^2 + 1)$

    Soluzione:

    a) $u_x(x,y) = \sin(x)\cosh(y) = v_y(x,y)$ e integrando si ha $v(x,y) = \sin(x)\sinh(y) + c$.
    b) $u_x(x,y) = \sin(x)e^{-y} = v_y$, e integrando $v(x,y) = -\sin(x)e^{-y} + c$.
    c) $u_x(x,y) = 4x^3 - 12xy^2 = v_y$ e integrando $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3 + c$.
    d) $\ln(x^2 + 1)$ non è una funzione armonica, e quindi non ha coniguata.

11. Determinare tutte le funzioni armoniche simmetriche in x e y, ovvero tutte le $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tali che $u(x,y) = u(y,x)$ e $\Delta u = 0$.

    Soluzione: Per simmetria, $u_{xx} = u_{yy}$ e per armonicità sono entrambe uguali a 0. Integrando due volte nella prima variabile si ottiene $u(x,y) = a(y)x + b(y)$ (per due funzioni $a, b \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e derivando due volte rispetto alla secondo variabile si ha $0 = a''(y)x + b''(y)$. Poiché 0 non dipende da x, $a''(y) = 0$ e di conseguenza anche $b''(y) = 0$; ovvero $a''(y) = \alpha y + \beta$ e $b''(y) = \gamma y + \delta$. Le funzioni armoniche simmetriche sono quindi nella forma $u(x,y) = \alpha yx + \beta x + \gamma y + \delta$ per ogni scelta di $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.