Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. L. Caporaso

Tutori: Luca Schaffler e Dario Spirito

TUTORATO 10
9 DICEMBRE 2010

1. Sviluppare in serie di Laurent attorno a 0:

a) $\frac{1}{z^{612}}$, $r = 1$, $R = 2$

b) $\frac{1}{z-1}$, $r = 2$, $R = 3$

c) $\frac{z^2}{z+16}$, $r = 2$, $R = 3$

d) $\frac{z-2}{z(z-1)}$, $r = \frac{1}{10}$, $R = \frac{1}{5}$

e) $\frac{z^5}{z^n - 1}$ attorno a $z = 1$, $r = \frac{1}{3n}$, $R = \frac{1}{2n}$

f) $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$, $r = 1$, $R = 2$

g) $\sin\left(\frac{1}{z}\right)\sin(z)$, $r = 1$, $R = 2$

h) $\sin\left(\frac{z+1}{z}\right)$, $r = 1$, $R = \pi$

Soluzione:

a) La funzione è già scritta in serie di Laurent.

b) *Primo metodo*: raccogliendo z al denominatore si ha

$$f(z) = \frac{1}{z\left(\frac{1}{z} - 1\right)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$$

In $\{2 < |z| < 3\}$ si ha in particolare $|\frac{1}{z}| > 1$, e quindi si può sviluppare la seconda frazione in serie geometrica:

$$-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n\geq 1}\frac{1}{z^n}$$

Secondo metodo: con l'espressione integrale del coefficiente di Laurent si ha

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z-1)z^{n+1}}\mathrm{d}z = \mathrm{Res}_0\frac{1}{(z-1)z^{n+1}} + \mathrm{Res}_1\frac{1}{(z-1)z^{n+1}}$$

dove γ è una qualsiasi curva che avvolge la parte interna dell'anello una volta; ad esempio la circonferenza $\{|z| = \frac{3}{2}\}$. In 1 questa funzione ha sempre un polo semplice, e quindi il suo residuo è

$$\mathrm{Res}_1\frac{1}{(z-1)z^{n+1}} = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{(z-1)z^{n+1}} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z^{n+1}} = 1$$

per ogni n. Analizziamo 0: se $n \leq -1$ la funzione non vi ha un polo, e quindi il residuo è 0; altrimenti, per la formula di Cauchy, è uguale a

$$\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{z-1}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{n!}\frac{n!(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}\bigg|_{z=0} = -1$$

e quindi

$$c_n = \begin{cases} 1+0=1 & \text{se } n \leq -1 \\ 1-1=0 & \text{se } n > -1 \end{cases}$$

c) L'unica singolarità della funzione è in $z = 16$, che è all'esterno di $B_3(0)$; la serie di Laurent della funzione non è altro che la sua serie di Taylor, che è

$$\frac{z^2}{z+16} = z^2 \frac{1}{16\left(\frac{z}{16}+1\right)} = \frac{z^2}{16}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{16}\right)^n = \sum_{n\geq 2}\frac{z^n}{16^{n-1}}$$

d)

$$f(z) = \frac{z-2}{z(z-1)} = \frac{1}{z}\frac{z-2}{z-1} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{1-z}\right)$$

Poiché $R = \frac{1}{5} < 1$, possiamo espandere con la serie geometrica ottenendo

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 + \sum_{n\geq 0} z^n\right) = \frac{2}{z} + \sum_{n\geq 0} z^n$$

e) Le singolarità nella funzione sono nelle radici n-esime dell'unità; sia $\xi_k := e^{\frac{2\pi k}{n}}$ e $\xi := \xi_1$. Osserviamo che i raggi sono tali che l'unica singolarità che ha indice 1 rispetto ai bordi è 1: infatti (con $\alpha := \frac{2\pi}{n}$)

$$|1-\xi| = \sqrt{(1-\cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha)} = \sqrt{2-2\cos\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\pi}{n} > \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{n} = \frac{2}{n} > \frac{1}{2n}$$

Iniziamo con l'esprimere $\frac{1}{z^n-1}$ come serie di Laurent, e per questo spezziamola in funzioni parziali come

$$\frac{1}{z^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{z-\xi_k}$$

Infatti, sviluppando entrambi i membri in serie di Taylor attorno a 0, si ha

$$\frac{1}{z^n-1} = -\sum_{k\geq 0} z^{nk}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{z-\xi} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{z}{\xi_k}-1} = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t\geq 0}\frac{z^t}{\xi_k^t} = -\frac{1}{n}\sum_{t\geq 0}\sum_{k=1}^{n} z^t\xi_{-k}^t = -\frac{1}{n}\sum_{t\geq 0} z^t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^t$$

Ora la sommatoria più interna dà 0 tranne che per t multiplo di n, quando dà n; quindi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{z-\xi} = -\frac{1}{n}\sum_{t\geq 0} z^{nt}n = \frac{1}{z^n-1}$$

Espandendo in serie di Laurent intorno ad 1 ogni addendo (tranne $k = n$, ovvero $\xi_k = 1$) si ha

$$\frac{\xi_k}{z-\xi_k} = \xi_k\frac{1}{z-1+1-\xi_k} = \xi_k\frac{1}{(1-\xi_k)\left(\frac{z-1}{1-\xi_k}-1\right)} = -\frac{\xi_k}{1-\xi_k}\sum_{s\geq 0}\left(\frac{z-1}{1-\xi_k}\right)^s$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{z-\xi_k} = \frac{1}{n(z-1)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi_k}{z-\xi_k} = \frac{1}{n(z-1)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}-\frac{\xi_k}{1-\xi_k}\sum_{s\geq 0}\left(\frac{z-1}{1-\xi_k}\right)^s =$$

$$= \frac{1}{n(z-1)}-\frac{1}{n}\sum_{s\geq 0}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi_k}{1-\xi_k}\left(\frac{z-1}{1-\xi_k}\right)^s = \frac{1}{n(z-1)}-\frac{1}{n}\sum_{s\geq 0}(z-1)^s\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\xi_k}{(1-\xi_k)^{s+1}}$$

Ponendo $w = z+1$ si ha poi $z^5 = (w-1)^5 = w^5-5w^4+10w^3-10w^2+5w-1$, e i coefficienti cercati si possono ottenere attraverso il prodotto di Cauchy

$$c_n = a_{n-5}-5a_{n-4}+10a_{n-3}-10a_{n-2}+5a_{n-1}-a_n$$

dove a_k è il coefficiente di w^k nell'espressione di $\frac{1}{z^n-1}$.

f) L'espansione in serie diTaylor di e^t attorno a 0 è $e^t\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}$; calcolandolo in $\frac{1}{z}$ si ha

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n n!}$$

che è una serie di Laurent, e quindi *la* serie di Laurent di $e^{1/z}$ attorno a 0. (La serie dell'esponenziale ha raggio di convergenza ∞, quindi la serie trovata converge su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, e in particolare nella regione considerata.)

g) Come nel caso precedente, si può usare lo sviluppo del seno in 0, avendo

$$f(z) = \left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

Ora con le somme di Cauchy si ottiene, per il prodotto di $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ e $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n$,

$$c_n = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i b_{n-i}$$

Per le nostre serie abbiamo

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \geq 0 \text{ oppure } n \equiv 0 \bmod 2 \\ \epsilon_n \frac{1}{(-n)!} & \text{se } n < 0 \text{ e } n \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

e

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 0 \text{ oppure } n \equiv 0 \bmod 2 \\ \nu_n \frac{1}{n!} & \text{se } n > 0 \text{ e } n \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

dove gli ϵ_n e in ν_n sono i segni apprpriati; quindi se $n \equiv 1 \bmod 2$ tutte le somme sono di un pari e di un dispari, e quindi sono tutte 0; altrimenti

$$c_{2n} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i b_{2n-i} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k+1} b_{2n-2k-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{2k+1} a_{2n-2k-1} =$$

$$\sum_{k \geq n} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^{k-n} \frac{1}{(2k+1-2n)!} = (-1)^n \sum_{k \geq n} \frac{1}{(2k+1)!(2k+1-2n)!}$$

h) Usando la formula di addizione e le serie di Taylor si ha

$$\sin\left(\frac{z+1}{z}\right) = \sin\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \sin(1)\cos\left(\frac{1}{z}\right) + \cos(1)\sin\left(\frac{1}{(}z)\right) =$$

$$\sin(1) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}(2n)!} + \cos(1) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!}$$

2. Calcolare con il metodo dei residui:
   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} \mathrm{d}x$
   b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x$, per $a \in \mathbb{R}$

<u>*Soluzione*</u>:

a) Il denominatore si fattorizza come $x^4 + 10x^2 + 9 = (x^2+9)(x^2+1)$, quindi $f(z) = \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9}$ (considerata come funzione complessa) ha poli semplici in $\pm i$ e $\pm 3i$, con residui

$$\mathrm{Res}_i f(z) = \lim_{z \to i} \frac{(z^2 - z + 2)(z-i)}{(z^2+9)(z+i)(z-i)} = \frac{i^2 - i + 2}{(i^2+9)(i+i)} = -\frac{1}{16} - \frac{i}{16}$$

$$\mathrm{Res}_{-i} f(z) = -\frac{1}{16} + \frac{i}{16}$$

$$\mathrm{Res}_{3i} f(z) = \frac{1}{16} - \frac{7i}{48}$$

$$\mathrm{Res}_{-3i} f(z) = \frac{1}{16} + \frac{7i}{48}$$

Sia $R \in \mathbb{R}^+$, e consideriamo il cammino Γ_R composto dall'intervallo reale $[-R, R]$ e dalla semicirconferenza superiore di raggio R e centro 0. Per R sufficientemente grande, Γ_R comprende i poli i e $3i$, e quindi l'integrale di f su Γ_R è

$$2\pi i\left(-\frac{1}{16}-\frac{i}{16}+\frac{1}{16}-\frac{7i}{48}\right) = -2\pi i\frac{10i}{48} = \frac{5\pi}{12}$$

Sia C_R la semicirconferenza di raggio R e I_R l'intervallo $[-R, R]$. È chiaro che, per ogni R, $\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{I_R} f(z)\mathrm{d}z$; ma l'integrale su I_R non è nient'altro che l'integrale di f (vista come funzione reale) tra $-R$ e R. Per $R \to \infty$, $\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ (in quanto l'integrale è assolutamente convergente); per ottenere il suo valore basta quindi far tendere R a infinito e calcolare l'integrale su C_R. Ma ora

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_{C_R} |f(z)|\mathrm{d}z = \int_{C_R}\left|\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}\right|\mathrm{d}z \leq$$

$$\leq \int_{C_R}\frac{A|z|^2}{B|z|^4}\mathrm{d}z = \int_{C_R}\frac{AR^2}{BR^4}\mathrm{d}z = \frac{c}{R^2}\int_{C_R}\mathrm{d}z = \frac{c}{R^2}2\pi R = \frac{c'}{R} \to^{R\to\infty} 0$$

per costanti A, B, c, c' che valgono da un certo R in poi. Quindi $\int_{C_R} \to 0$, e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{12}$$

b) Se $a = 0$, l'integrale non esiste perché non c'è convergenza in zero. Se $a \neq 0$, non abbiamo problemi di integrabilità in quanto $\int_0^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2+a^2}\right| \mathrm{d}x \leq c + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x < \infty$. Calcoliamone il valore con il metodo dei residui. In primo luogo, riscriviamo l'integrale in funzione dell'esponenziale complesso:

$$I := \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2(x^2+a^2)}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{2(x^2+a^2)}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{2(x^2+a^2)}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{2(x^2+a^2)}\mathrm{d}x.$$

A questo punto definiamo $f(z) := \frac{e^{iz}}{2(z^2+a^2)}$. Notiamo che f ha due poli semplici in $\pm i|a|$. Consideriamo ora il cammino $\Gamma := C + L$ dove $C := \{Re^{it} | t \in (0, \pi)\}$ e $L := \{t | t \in [-R, R]\}$ con R sufficientemente grande affinché $ia \notin \Gamma$ e $n(\Gamma, ia) = 1$. Definendo $\Omega := \mathbb{C}$ e $\Omega' := \mathbb{C}\backslash\{\pm ia\}$, si ha che f è olomorfa su Ω', $\Gamma \subseteq \Omega'$ e $\Gamma \sim 0(\mathrm{mod}\ \Omega)$, quindi per il teorema dei residui:

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}_{i|a|} f = \int_{L^+} + \int_{C^+} f(z)\mathrm{d}z.$$

Valutiamo ora il comportamento dell'ultimo membro quando $R \to \infty$.

$$\int_{L^+} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{2(t^2+a^2)}\mathrm{d}t \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{2(t^2+a^2)}\mathrm{d}t$$

$$\left|\int_{C^+} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_{C^+} |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_0^\pi \frac{|e^{iRe^{it}}|}{2|R^2e^{2it}+a^2|}R\mathrm{d}t \leq$$
$$\leq \frac{R}{2}\int_0^\pi \frac{|e^{iR(\cos t + i\sin t)}|}{R^2-a^2}\mathrm{d}t = \frac{R}{2(R^2-a^2)}\int_0^\pi e^{-R\sin t}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{R}{(R^2-a^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\mathrm{d}t \leq \frac{R}{R^2-a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2t}{\pi}}\mathrm{d}t \leq$$
$$\leq \frac{R}{R^2-a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2t}{\pi}}\mathrm{d}t = \frac{R}{R^2-a^2}\left[-\frac{\pi}{2R}e^{-R\frac{2t}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{\pi}{2(R^2-a^2)}(1-e^{-R}) \to 0$$

dove la stima (da ricordare!) $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ segue immediatamente da uno studio di funzione diretto (esercizio). A questo punto possiamo dedurre che:

$$2\pi i \mathrm{Res}_{i|a|} f = \int_{L^+} + \int_{C^+} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{2(t^2+a^2)}\mathrm{d}t = I$$

quindi, determinando il valore del residuo, abbiamo quello dell'integrale.

$$\mathrm{Res}_{i|a|} f = \lim_{z \to i|a|} (z - i|a|)\frac{e^{iz}}{2(z-i|a|)(z+i|a|)} = \frac{e^{-|a|}}{4i|a|}.$$

La conclusione è che:

$$I = \frac{\pi e^{-|a|}}{2|a|}.$$

3. Sviluppare in serie di Laurent $f(z) = \dfrac{2z+1}{(z-1)(z+2)}$ in tutti i punti di $\mathbb{C}$ e in tutti i possibili dischi o anelli massimali.

   Soluzione: Poniamo

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}$$

   Sviluppiamo prima nel polo 1, in -2 sarà analogo. Possiamo sviluppare in un anello massimale di raggi 0 e 3 che è contenuto nel dominio in cui f è olomorfa. Allora:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3+(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{(z-1)}{3}} =$$
$$= \frac{1}{z-1} + \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}}(z-1)^k$$

che è lo sviluppo in serie di Laurent. Oppure possiamo sviluppare in un anello di raggi 3 e ∞, quindi i punti z in tale anello sono tali che $3 < |z-1| \Rightarrow \frac{3}{|z-1|} < 1$, allora:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3+(z-1)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1+\frac{3}{z-1}}\frac{1}{(z-1)} =$$

$$= \frac{1}{z-1} + \sum_{k\geq 0}(-3)^k \frac{1}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{h\leq -2}(-3)^{-h-1}(z-1)^h + \frac{2}{z-1}$$

concludendo i possibili sviluppi su anelli massimali centrati in 1. Sia ora w un qualunque punto del piano complesso diverso da 1 e -2. Ci sono tre possibili casi:

Caso 1: $|w-1| < |w+2|$, cioè w è più vicino a 1 che a -2. Abbiamo tre possibili sviluppi:

a) Sviluppo nella palla di centro w e raggio $|w-1|$, quindi per i punti $|z-w| < |w-1|$. Allora:

$$f(z) = \frac{1}{z-w+w-1} + \frac{1}{z-w+w+2} =$$

$$= \frac{1}{w-1}\frac{1}{1+\frac{z-w}{w-1}} + \frac{1}{w+2}\frac{1}{1+\frac{z-w}{w+2}} =$$

$$= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{(z-w)^k}{(w-1)^{k+1}} + \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{(z-w)^k}{(w+2)^{k+1}} =$$

$$= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \left(\frac{1}{(w-1)^{k+1}} + \frac{1}{(w+2)^{k+1}}\right)(z-w)^k$$

dove lo sviluppo della seconda geometrica è possibile perché $|\frac{z-w}{2+w}| < 1$ se $|z-w| < |2+w|$, ma $|z-w| < |w-1| < |2+w|$.

b) Sviluppo nell'anello di centro w e raggi $|w-1|$ e $|w+2|$, quindi per i punti z tali che $|w-1| < |z-w| < |w+2|$. Allora:

$$f(z) = \frac{1}{z-w+w-1} + \frac{1}{z-w+w+2} =$$

$$= \frac{1}{z-w}\frac{1}{1+\frac{w-1}{z-w}} + \frac{1}{w+2}\frac{1}{1+\frac{z-w}{w+2}} =$$

$$= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{(w-1)^k}{(z-w)^{k+1}} + \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{(z-w)^k}{(w+2)^{k+1}}$$

c) Sviluppo nell'anello di centro w e raggi $|w+2|$ e ∞, quindi considerando i punti $|z-w| > |w+2|$. Allora:

$$f(z) = \frac{1}{z-w+w-1} + \frac{1}{z-w+w+2} =$$

$$= \frac{1}{z-w}\frac{1}{1+\frac{w-1}{z-w}} + \frac{1}{z-w}\frac{1}{1+\frac{w+2}{z-w}} =$$

$$= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{(w-1)^k}{(z-w)^{k+1}} + \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{(w+2)^k}{(z-w)^{k+1}} =$$

$$= \sum_{k\geq 0}(-1)^k \left((w-1)^k + (w+2)^k\right) \frac{1}{(z-w)^{k+1}}$$

Caso 2: $|w-1| = |w+2| =: r$. Ci sono allora due sottocasi:

a) Sviluppo nella palla $B_r(w)$.

b) Sviluppo nell'anello $\{r < |z-w|\}$.

Caso 3: $|w-1| > |w+2|$. Analogo al caso 1.

4. Trovare una funzione intera che abbia zeri di ordine 1 solo negli interi e negli "interi immaginari" ni, con $n \in \mathbb{Z}$.

   Soluzione: La funzione $\frac{1}{z}\sin(\pi z)\sin(i\pi z)$ ha ovviamente tutte le proprietà cercate.

5. Dimostrare che il prodotto infinito $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{z/k}$ converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C}$.

   Soluzione: Fissiamo un compatto $K \subseteq \mathbb{C}$. La convergenza uniforme del prodotto èe legata a quella della sommatoria:

$$\sum_{k\geq 1}\log\left(1-\frac{z}{k}\right)+\frac{z}{k}$$

   Perché, fissando una adeguata determinazione del logaritmo definitivamente:

$$\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{\frac{z}{k}} = e^{\log\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{\frac{z}{k}}} = e^{\sum_{k\geq 1}\log(1-\frac{z}{k})+\frac{z}{k}}$$

   Il comportamento asintotico della sommatoria è quello di

$$\sum_{k\geq 1}\frac{z^2}{2k^2}$$

   perché, per lo sviluppo di Taylor, per k grande: $\log\left(1-\frac{z}{k}\right)+\frac{z}{k} = -\frac{z}{k}+\frac{z^2}{2k^2}+\frac{z}{k}+o(\frac{1}{k}) = \frac{z^2}{2k^2}+o(\frac{1}{k^2})$ e quindi per il confronto asintotico:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2k^2}{z^2}\left(\log\left(1-\frac{z}{k}\right)+\frac{z}{k}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{2k^2}{z^2}\left(\frac{z^2}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = 1.$$

   Ora la seconda serie converge uniformemente su K (anzi, converge totalmente), da cui quanto voluto.

6. Dimostrare che, per $|z| < 1$, $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}$

   Soluzione: Mostriamo che per $|z| < 1$:
$$1 = (1-z)\prod_{n\geq 0}(1 + z^{2^n}).$$
   Ma $\forall N \in \mathbb{N}$:
$$(1-z)\prod_{n=0}^{N}(1 + z^{2^n}) = 1 - z^{2^{N+1}}$$
   che si vede subito per induzione. Ora facendo il limite per $N \to \infty$, si ha che:
$$(1-z)\prod_{n\geq 1}(1 + z^{2^n}) = \lim_{N\to\infty}(1-z)\prod_{n=0}^{N}(1 + z^{2^n}) = \lim_{N\to\infty} 1 - z^{2^{N+1}} = 1$$
   perché $|z| < 1$.

   Un altro modo di interpretare la produttoria: consideriamo un prodotto parziale $\displaystyle\prod_{n=0}^{N}(1 + z^{2^n}) = (1 + z^1)(1 + z^2)(1 + z^4)\cdots(1 + z^{2^N})$ e svolgiamo tutti i prodotti: ogni addendo sarà determinato da N scelte, una per ogni fattore (1 oppure il termine con z), e quindi sarà z^{α} dove α è un intero somma di potenze di 2; ma allora le scelte corrispondono alla scrittura in base 2 di α, dove la cifra sarà 0 se si è scelto 1 o 1 se si è scelto z^{2^k}; quindi, al crescere di N, si ottengono in questo modo tutti i monomi z^s *una volta sola*, in quanto la scrittura in base 2 è unica. Ma allora la produttoria sarà uguale alla funzione la cui serie di Taylor è $\sum_{n\geq 0} z^n$, ovvero $\frac{1}{1-z}$.

7. Dimostrare che una serie di Laurent può essere differenziata termine a termine.

   Soluzione: La serie di Laurent può essere scritta come:
$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$
   quindi derivare termine a termine la serie di Laurent vuol dire poter derivare termine a termine le due sommatorie. In entrambi i casi, come noto dalla teoria, le due sommatorie convergono uniformemente, la prima in una regione del tipo $\{|z-z_0| > R\}$ e la seconda in $\{|z-z_0| < R'\}$. Allora:
$$\frac{d}{dz}\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1}$$

8. Verificare che la derivata logaritmica del prodotto di due funzioni è la somma delle derivate logartimiche dei fattori.

   Soluzione:
$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'g + fg'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$