Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. L. Caporaso

Tutori: Luca Schaffler e Dario Spirito

Tutorato 11
15 dicembre 2010

1. Calcolare:

a) $\displaystyle\int_0^\pi \tan(t+i)\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta}$, $a>1$

Soluzione:

a) La tangente è periodica di periodo π, quindi l'integrale cercato (sia I) è metà dell'integrale tra 0 e 2π della stessa funzione. Con il cambio di variabili $z=e^{it}$ ($\mathrm{d}z = ie^{it}\mathrm{d}t$) si ha

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(t+i)}{\cos(t+i)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}z}{iz} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{z^2-e^2}{z(z^2+e^2)}\mathrm{d}z$$

che ha una sola singolarità all'interno, lo 0, in cui il residuo è $\frac{-e^2}{e^2}=-1$; quindi $I=-\frac{1}{2}(-1)(2\pi i)=\pi i$.

b) Con lo stesso trucco precedente, trasformiamo l'integrale reale in un integrale complesso:

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{1}{z+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} -i\frac{2}{z^2+2az+1}\mathrm{d}z$$

che ha, sul piano complesso, due singolarità, $-a\pm\sqrt{a^2-1}$, ed è facile vedere che una delle due è interna al cerchio unitario e una esterna; calcolando il residuo l'integrale è uguale a $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

2. Calcolare i seguenti integrali con il metodo dei residui:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+a^2-2a\cos x}\mathrm{d}x$, $a\in\mathbb{R}^+$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{(e^x+1)(e^x+2)}\mathrm{d}x$, $a\in(0,2)$

Soluzione:

a) Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{e^{2iz}-1}{2} = \frac{-2\sin^2(z)}{z^2}$: f ha 0 come unica singolarità isolata in $\mathbb{C}$, e questa è un polo di ordine 1. Prendiamo come cammino $\Gamma := l_1 + l_2 + c + C$ dove, se $0 < r < R$, $s_1 := \{t | t \in (r, R)\}$, $s_2 := \{t | t \in (-R, -r)\}$, $c := \{re^{it} | t \in [0, \pi]\}$ e $C := \{Re^{it} | t \in [0, \pi]\}$. Applicando il teorema dei residui (o equivalentemente il teorema di Cauchy) è immediato che:

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)\mathrm{d}z = \int_{s_1} + \int_{s_2} + \int_C + \int_{c^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

e studiamone il comportamento per $f, R \to +\infty$. Si calcola subito che:

$$\int_{s_1} + \int_{s_2} f(z)\mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2it}-1}{t^2}\mathrm{d}t$$

Poi tenendo conto della stima su $\sin t$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$ utilizzata nell'esercizio 2 punto b del precedente tutorato:

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_C \left|\frac{e^{2iz}-1}{z^2}\right| |\mathrm{d}z| = \int_0^{\pi} \frac{|e^{2iRe^{it}}-1|}{R}\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \frac{1}{R}\int_0^{\pi} 1 + |e^{2iR\cos t}e^{-2R\sin t}|\mathrm{d}t = \frac{\pi}{R} + \frac{1}{R}\int_0^{\pi} e^{-2R\sin t} =$$

$$= \frac{\pi}{R} + \frac{2}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2R\sin t}\mathrm{d}t \to 0$$

Infine valutiamo:

$$\int_{c^-} f(z)\mathrm{d}z$$

per r tendente a zero. Poiché f ha in 0 un polo semplice, poniamo $f(z) = \frac{g(z)}{z}$ con g olomorfa in zero e $g(0) \neq 0$. Allora, per lo sviluppo di Taylor, $f(z) = \frac{g(0)+zA(z)}{z}$, dove A è una funzione olomorfa e $g(0) = \mathrm{Res}_0(f(z))$. Dunque:

$$\int_{c^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{c^+} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{c^+} \frac{g(0)}{z} + A(z)\mathrm{d}z =$$

$$= -\pi i \mathrm{Res}_0(f(z)) - \int_{c^+} A(z)\mathrm{d}z \to -\pi i \mathrm{Res}_0(f(z)) = 2\pi$$

perché per r sufficientemente piccolo:

$$\left|\int_{c^+} A(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_{c^+} \mathrm{Max}_c|A(z)||\mathrm{d}z| \to 0.$$

e il calcolo del residuo di f in zero è ovvio. Concludendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2it}-1}{t^2}\mathrm{d}t = -2\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2\sin 2t}{t^2}\mathrm{d}t + 2i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

e poiché -2π ha parte immaginaria nulla:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

b) Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{3}\log(z)}}{1+z^2}$ definita in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, e sia $\Gamma_{R,r,\epsilon}$ il cammino composto da due archi di circonferenza, di raggio R e r (con $R > r$), completi ad eccezione dell'arco la cui parte reale è positiva e la parte immaginaria è compresa tra $-\epsilon$ e ϵ, più i due segmenti (paralleli all'asse reale) di collegamento tra queste due circonferenze. Per r e ϵ sufficientemente piccoli e R sufficientemente grande, $\Gamma_{R,r,\epsilon}$ comprende al suo interno i due poli i e $-i$; i residui sono

$$\lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \frac{e^{\frac{i}{3}}}{2i}$$

$$\lim_{z \to -i} (z+i) f(z) = \frac{e^{\frac{-i}{3}}}{-2i}$$

L'integrale è quindi definitivamente

$$I = 2\pi i \left(\frac{e^{\frac{i}{3}}}{2i} + \frac{e^{\frac{-i}{3}}}{-2i} \right) = \pi(e^{i/3} + e^{-i/3})$$

Per $R \to \infty$, l'integrale sulla circonferenza grande è un $O(RR^{1/3}/R^2)$ (ovvero va come $R^{1/3}/R^2$ moltiplicato per R – dalla lunghezza della circonferenza), e quindi tende in modulo a 0; anche sulla circonferenza piccola l'integrale tende a 0, perché la lunghezza tende a 0 e f è limitata in un intorno di 0. Sul segmento orizzontale superiore l'integrale tende a quello che dobbiamo calcolare, mentre sul segmento inferiore si ha

$$\frac{e^{\frac{1}{3}\log(z)}}{z^2+1} \to \frac{e^{\frac{1}{3}\ln x + \frac{2\pi i}{3}}}{x^2+1} = \frac{x^{1/3}\omega}{x^2+1}$$

perché il logaritmo ha "fatto un giro", ovvero è aumentato di $2\pi i$. Inoltre dobbiamo moltiplicare per -1 in quanto il segmento è percorso in senso inverso. Quindi (posto I l'integrale cercato)

$$I - \omega I = \pi(e^{i/3} + e^{-i/3}) \implies I = \frac{\pi(e^{i/3} + e^{-i/3})}{1-\omega} = \text{(dopo varie semplificazioni)} \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

c) Integrando su una semicirconferenza di raggio R e centro 0 e sul suo diametro reale, si ottiene che l'integrale è uguale alla somma dei residui nel semipiano superiore, e quindi $I = -\frac{i}{6} - \frac{\zeta}{6} - \frac{\zeta^5}{6}$ dove ζ è una radice dodicesima dell'unità.

d) La funzione da usare ha poli semplici in $2k\pi + i\log_* a$. Preso come camminno $\Gamma := r + u + l + d$, dove $r := \{t|t \in (-\pi,\pi)\}$, $u := \{\pi + it|t \in [0,h]\}$, $l := \{t + ih|t \in (-\pi,\pi)\}$, $d := \{-\pi + it|t \in [0,h]\}$ con $h > \log_* a$. Per il teorema dei residui:

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}_{i\log_* a}(f(z))$$

Valutiamo il comportamento degli integrali quando $h \to +\infty$, il resto dei conti sono lasciati per esercizio.

$$\int_u f(z)\mathrm{d}z = \int_0^h f(\pi + it)i\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \frac{i\pi - t}{a + e^t}\mathrm{d}t$$

$$-\int_d f(z)\mathrm{d}z = -\int_0^h f(-\pi + it)i\mathrm{d}t \to -\int_0^{+\infty} \frac{-i\pi - t}{a + e^t}\mathrm{d}t$$

allora:

$$\int_0^{+\infty} \frac{i\pi - t}{a + e^t}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{i\pi + t}{a + e^t}\mathrm{d}t = 2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{1}{a + e^t}\mathrm{d}t$$

dove l'ultimo integrale si calcola con la sostituzione $e^t = x$. Infine

$$-\int_l f(z)\mathrm{d}z = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t + ih}{a - e^{-it}e^h}\mathrm{d}t$$

il cui integrando converge uniformemente a zero su $[-\pi,\pi]$ quando $h \to +\infty$.

e) Poniamo $f(z) := \frac{e^{az}}{(e^z+1)(e^z+2)}$. Immediatamente si vede che f ha poli semplici in $i(\pi + 2k\pi)$ e $\log_* 2 + i(\pi + 2k\pi)$. Definiamo $\Gamma := r + u + l + d$ con $r := \{t|t \in (-R,R)\}$, $u := \{R + it|t \in [0,2\pi i]\}$, $l := \{t + 2\pi i|t \in (-R,R)\}$ e $d := \{-R + it|t \in [0,2\pi i]\}$ dove $R > \log_* 2$. Gli unici poli per cui Γ ha indice non nullo sono $i\pi$ e $\log_* 2 + i\pi$. Per il teorema dei residui:

$$\oint_{\Gamma+} f(z)\mathrm{d}z = \int_r + \int_u - \int_l - \int_d =$$

$$= 2\pi i(\mathrm{Res}_{i\pi}(f(z)) + \mathrm{Res}_{\log_* 2 + i\pi}(f(z))).$$

Valutiamo al solito gli integrali per $R \to +\infty$.

$$\int_r f(z)\mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{(e^t + 1)(e^t + 2)}\mathrm{d}t$$

$$-\int_l f(z)\mathrm{d}z \to -e^{a2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{(e^t + 1)(e^t + 2)}\mathrm{d}t$$

$$\int_u f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}e^{ait}}{(e^{R+it} + 1)(e^{R+it} + 2)}i\mathrm{d}t \to 0$$

perché, nell'ultimo limite,sfruttando il fatto che $0 < a < 2$, si ha che c'è convergenza uniforme in $[0, 2\pi]$ della funzione integranda per $R \to +\infty$, quindi si possono scambiare limite e integrale. Analogamente si fa su d. Allora:

$$\frac{2\pi i}{1 - e^{a2\pi i}}(\mathrm{Res}_{i\pi}(f(z)) + \mathrm{Res}_{\log_* 2+i\pi}(f(z))) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{(e^t + 1)(e^t + 2)}\mathrm{d}t$$

Calcolando i residui e sviluppando un po' di conti, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{(e^t + 1)(e^t + 2)}\mathrm{d}t = \frac{\pi(1 - 2^{a-1})}{\sin a\pi}.$$

3. Dimostrare che z_0 è una singolarità essenziale per una funzione olomorfa f se e solo se lo è per f'.

   Soluzione: z_0 è una singolarità essenziale se e solo se la serie di Laurent di f in z_0 è illimitata a sinistra (ovvero se ci sono infiniti termini con potenze negative non nulle). Derivando termine a termine i coefficienti nulli non cambiano, e quindi si ha la tesi.

4. Determinare il numero di zeri di $f(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 - 7z + 1$ in $B_4(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)$.

   Soluzione: Basta applicare Rouché: su $\{|z| = 4\}$ si può prendere $g_1(z) = z^4$, su $\{|z| = \frac{1}{2}\}$ $g_2(z) = -7z$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-4)(z^3+1)}\mathrm{d}z$.

   Soluzione: All'interno della curva vi sono i poli semplici 0, 1, ω e ω^2 (dove ω è una radice terza dell'unità), e l'integrale è

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-4)(z^3+1)}\mathrm{d}z = 2\pi i(\mathrm{Res}_0 + \mathrm{Res}_1 + \mathrm{Res}_\omega + \mathrm{Res}_{\omega^2}) =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{-3(1-\omega)(1-\omega^2)} + \frac{1}{\omega(\omega-4)(\omega-1)(\omega-\omega^2)} + \frac{1}{\omega^2(\omega^2-4)(\omega^2-1)(\omega^2-\omega)}\right)$$

6. Sia $f(z) = \dfrac{z(z-2)}{(z^2+1)\cos(z)}e^{1/z}$. Determinare l'aperto massimale Ω di $\hat{\mathbb{C}}$ dove è olomorfa, i suoi zeri e le sue singolarità isolate; determinare l'ordine degli zeri e il tipo di singolarità.

   Soluzione: Sul piano complesso, f è olomorfa ovunque eccetto che in 0 (dove $ze^{1/z}$ ha una singolarità), in $\pm i$ (dove si annulla $z^2 + 1$) e nei $\pi(n + \frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$, dove si annulla il coseno; in infinito f non è olomorfa né ha una singolarità isolata, in quanto vi sono infiniti poli.

   In 0 la singolarità è essenziale: si ha infatti

$$f(z) = \left(\frac{z-2}{(z^2+1)\cos(z)}\right)(ze^{1/z})$$

e se il primo fattore è olomorfo in 0, sviluppando il secondo in serie di Laurent si ha un'espansione infinita, e quindi la singolarità è essenziale; di conseguenza il loro prodotto ha ancora una singolarità essenziale.

In $\pm i$ si ha un polo semplice, così come in $\pi(n+\frac{1}{2})$. (Sono gli zeri rispettivamente di z^2+1 e del coseno).

L'unico zero della funzione è in 2 (dal momento che 0 è una singolarità), e il suo ordine è 1.

7. Sviluppare in serie di Laurent $f(z) = \dfrac{1+\cos(z)}{z^4}$ e $g(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ vicino all'origine (ovvero nell'anello con r minore tra quelli in cui tale espansione è possibile), determinando per entrambe l'anello massimale in cui vale tale espansione.

   Soluzione: Entrambe le funzioni hanno una singolarità isolata in 0, quindi $r = 0$; f inoltre non ha altre singolarità, e il numeratore è intero, e quindi $R_f = \infty$, mentre $R_g = 1$ dal momento che 1 è una singolarità. Sviluppando in serie di Taylor si ha

$$f(z) = \frac{\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}}{z^4} = \sum_{n\geq -4}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+4)!}$$

$$g(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0} z^n = \sum_{n\geq -1} z^n$$

8. Determinare se è possibile mappare in modo conforme e biunivoco le seguenti regioni una sull'altra, e, se esiste, trovare esplicitamente una mappa:

   a) $\{\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) > 0\} \longrightarrow \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$
   b) $B_1(0) \longrightarrow B_1(0)\setminus\{w\}$ per $w \in \{0, i, \gamma\}$ (γ è la costante di Eulero-Mascheroni)
   c) $B_1(0)\setminus\{0\} \longrightarrow B_1(0)\setminus\{\gamma\}$
   d) $\{0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\} \longrightarrow B_1(0)$ e) $\{|z| > 1\} \longrightarrow \{0 < |z| < 1\}$

   Soluzione:

   a) La mappa è $f(z) = z^4$.
   b) Per $w = 0$ o $w = \gamma$ la prima regione non è semplicemente connessa, e quindi non esiste una mappa; invece $B_1(0)\setminus\{i\} = B_1(0)$ e quindi la mappa è semplicemente l'identità.
   c) Basta trovare un automorfismo del disco che manda 0 in γ; ad esempio $f(z) = \frac{z-\gamma}{1-\gamma z}$.
   d) Moltiplicando per i si ottiene una striscia verticale, che attraverso l'esponenziale viene mandata nella semipiano superiore, che può essere poi richiuso nel disco. Una mappa è quindi $\dfrac{e^{iz}+i+1}{e^{iz}+i-1}$

e) Basta prendere $f(z) = \frac{1}{z}$

9. Determinare l'anello di convergenza di $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 3^{-|n|} z^{2n}$

<u>*Soluzione*</u>: $a_{2n} = 3^{-|n|}$, $a_{2n+1} = 0$; quindi la serie dei termini di grado positivo converge se e solo se

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z| < 1 \iff |z| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} 3^{\frac{-|n|}{2}\frac{1}{n}}} = \sqrt{3}$$

Allo stesso modo la serie dei termini di grado negativo converge se e solo se

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|^{1/n}}{|z|} < 1 \iff |z| > \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} 3^{\frac{-|n|}{2}\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e quindi l'anello è $\{\frac{1}{\sqrt{3}} < |z| < \sqrt{3}\}$.