Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. L. Caporaso

Tutori: Luca Schaffler e Dario Spirito

Tutorato 2
6 ottobre 2010

1. Dare un esempio di due serie divergenti la cui somma converge.

   Soluzione: Basta prendere una qualsiasi serie divergente e il suo opposto: $\sum_{n\geq 1} a_n$ e $\sum_{n\geq 1} -a_n$ non esistono, ma

$$\sum_{n\geq 1} a_n + \sum_{n\geq 1} -a_n = \sum_{n\geq 1} (a_n - a_n) = \sum_{n\geq 1} 0 = 0$$

2. Sia $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ una serie di potenze. Dimostrare che, se $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ converge ad un R, quest'ultimo è il raggio di convergenza della serie.

   Soluzione: Sia S il limite del rapporto. Per definizione esiste un N tale che, per ogni $n \geq N$,

$$\frac{1}{S-\epsilon}|a_n| < |a_{n+1}| < \frac{1}{S+\epsilon}|a_n|$$

   e quindi

$$\left(\frac{1}{S-\epsilon}\right)^2 |a_n| < \frac{1}{S-\epsilon}|a_{n+1}| < a_{n+2} \Longrightarrow \left(\frac{1}{S-\epsilon}\right)^k |a_n| < |a_{n+k}|$$

   e allo stesso modo per l'altra disuguaglianza. Dunque

$$\left(\frac{1}{S+\epsilon}\right)^k |a_n| < |a_{n+k}| < \left(\frac{1}{S-\epsilon}\right)^k |a_n|$$

   per ogni k, fissato un $n \geq N$. Estraendo la radice k-esima

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{S+\epsilon}\right)^{k/k} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_n|} < \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{n+k}|} \limsup_{k\to\infty} < \left(\frac{1}{S-\epsilon}\right)^{k/k} \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_n|}$$

   Essendo n fissato, le radice a primo e terzo membro tendono a 1; essendo il membro centrale l'inverso del raggio di convergenza risulta

$$\frac{1}{S+\epsilon} < \frac{1}{R} < \frac{1}{S-\epsilon}$$

   ovvero $S = R$.

3. Sviluppare in serie di potenze nel punto indicato.

a) $f(z) := \dfrac{1}{z^2+z+1}$ in $z = i$

b) $f(z) := (2i+z)^{-3}$ in $z = 0$

<u>*Soluzione*</u>:

a) $z^2+z+1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, allora:

$$\frac{1}{z^2+z+1} = \frac{1}{z-i+i-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{1}{z-i+i-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{z-i+\frac{1-i(-2+\sqrt{3})}{2}} \cdot \frac{1}{z-i+\frac{1+i(2+\sqrt{3})}{2}} =$$

posto $a = \frac{1-i(-2+\sqrt{3})}{2}$ e $b = \frac{1+i(2+\sqrt{3})}{2}$:

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{z-i}{a}}\frac{1}{b}\frac{1}{1+\frac{z-i}{b}} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{a^{n+1}}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{b^{n+1}} =$$

$$= \sum_{s\geq 0}(-1)^s\left(\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{a^{k+1}}\frac{1}{b^{s-k+1}}\right)(z-i)^s$$

b) Basta osservare che:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{2i+z} = \frac{1}{(2i+z)^3} = \frac{1}{4i}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{1+\frac{z}{2i}} =$$

$$= \frac{1}{4i}\frac{d^2}{dz^2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^n}{(2i)^n} = \frac{1}{4i}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{d^2}{dz^2}\frac{z^n}{(2i)^n} =$$

$$= \frac{1}{4i}\sum_{n\geq 2}(-1)^n n(n-1)\frac{z^{n-2}}{(2i)^n}$$

4. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+i^n)z^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}z^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}z^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+i^n)^n z^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n}z^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\ln(n)z^n$

<u>*Soluzione*</u>:

a) $i^n \in \{1, i, -1, -i\}$, quindi $1+i^n \in \{2, i+1, 0, 1-i\}$, e

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|1+i^n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1 \Longrightarrow R = 1$$

b) Allo stesso modo

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1+i^n|^n} = \limsup_{n\to\infty} 1+i^n = 2 \Longrightarrow R = \frac{1}{2}$$

c)

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n^2}} = \limsup_{n\to\infty} 2^{n^2/n} = \limsup_{n\to\infty} 2^n = \infty \Longrightarrow R = 0$$

d) Usando il criterio del rapporto

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$$

e) Separiamo i casi n pari e n dispari, usando il criterio del rapporto: se $n = 2m$ si ha

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} = \frac{\binom{2m}{m}}{\binom{2m+1}{m}} = \frac{(2m)!}{m!m!}\frac{m!(m+1)!}{(2m+1)!} = \frac{m+1}{2m+1} \to \frac{1}{2}$$

mentre se $n = 2m-1$

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} = \frac{\binom{2m-1}{m-1}}{\binom{2m}{m}} = \frac{(2m-1)!}{m!(m-1)!}\frac{m!m!}{(2m)!} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

e quindi il raggio di convergenza è $\frac{1}{2}$.

f) $1 \le \ln(n) \le n$, quindi

$$1 \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n)} \le \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\exp(\ln(n))} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = 1$$

e il raggio di convergenza è 1.

5. Studiare la convergenza assoluta delle seguenti serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1-i}{z}\right)^n$

<u>*Soluzione*</u>:

a) Applicando il criterio della radice, per avere convergenza assoluta si deve avere che:

$$\limsup \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{|z+1|^n}} = \frac{|z|}{|z+1|} < 1 \Leftrightarrow |z| < |z+1|$$

il che, geometricamente, equivale a considerare i punti del piano complesso che distano da 0 meno (strettamente) di quanto distano da -1, cioè i punti $A = \{z|\mathrm{Re}(z) > -\frac{1}{2}\}$.

b) Supponiamo $|z| = 1$. Allora $|\frac{z^n}{1+z^{2n}}| = \frac{1}{|1+z^{2n}|} \geq \frac{1}{|1|+|z|^{2n}} = \frac{1}{2}$, quindi la serie non converge puntualmente perché non è infinitesima.

Se $|z| < 1$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{|1+z^{2n}|}} = |z| \limsup_{n\to\infty} |z| \sqrt[n]{\frac{1}{|1+z^{2n}|}} = |z|$$

perché $\frac{1}{|1+z^{2n}|} \to 1$ e così la sua radice; per il criterio della radice quindi c'è convergenza assoluta. Se invece $|z| > 1$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{|1+z^{2n}|}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|z|}{|z|^2} \sqrt[n]{\frac{1}{|1+z^{-2n}|}} = \frac{1}{|z|} < 1$$

e quindi la serie converge assolutamente.

c) Come nel punto a, si fanno considerazioni del tutto analoghe. Questa volta la retta in questione è $\{t + i(1-t) | t \in \mathbb{R}\}$.

6. Siano $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ e $\sum_{n\geq 1} b_n z^n$ due serie di potenze con raggio di convergenza rispettivamente R_1 e R_2. Dimostrare che il raggio di convergenza di $\sum_{n\geq 1} a_n b_n z^n$ è $\geq R_1 R_2$.

<u>*Soluzione*</u>: Sia R il raggio di convergenza di $\sum_{n\geq 1} a_n b_n z^n$. Dalla definizione di raggio di convergenza si ha

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{b_n|}}$$

$$R_1 R_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

e quindi la tesi è verificata una volta dimostrato che $\limsup x_n y_n \leq (\limsup x_n)(\limsup y_n)$ per ogni coppia di successioni positive $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Siano $\limsup x_n = X$, $\limsup y_n = Y$: questo significa che $x_n \leq X + \epsilon$ e $y_n \leq Y + \epsilon$ definitivamente, ovvero

$$x_n y_n \leq (X+\epsilon)(Y+\epsilon) = XY + \epsilon(X+Y+\epsilon) =$$

definitivamente. Ma $\epsilon(X+Y+\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, e quindi, per ogni ϵ', $x_n y_n \leq XY + \epsilon'$ definitivamente, e $\limsup x_n y_n < XY$, come richiesto.

7. Dimostrare la formula di Eulero $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$ attraverso la loro definizione come serie di potenze.

<u>*Soluzione*</u>:

$$e^{iy} = \sum_{n\geq 0} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{i^n y^n}{n!}$$

Separando secondo la classe di congruenza modulo 4 si ottiene

$$e^{iy} = \left(\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \equiv 0 \bmod 4}} \frac{y^n}{n!} \right) - \left(\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \equiv 2 \bmod 4}} \frac{y^n}{n!} \right) + i \left(\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \equiv 1 \bmod 4}} \frac{y^n}{n!} \right) - i \left(\sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \equiv 3 \bmod 4}} \frac{y^n}{n!} \right)$$

e sostituendo $n = 2m$ per i pari e $n = 2m + 1$ per i dispari

$$e^{iy} = \left(\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 0 \bmod 2}} \frac{y^{2m}}{(2m)!} \right) + \left(\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 1 \bmod 2}} -\frac{y^{2m}}{(2m)!} \right) +$$

$$+i \left(\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 0 \bmod 2}} \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) + i \left(\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 1 \bmod 2}} -\frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} \right)$$

Osserviamo ora che nella seconda e nella quarta sommatoria il segno meno può essere sostituito da $(-1)^m$ in quanto entrambe coinvolgono solo i dispari, mentre nelle altre si può aggiungere $(-1)^m$, che è 1 essendo m pari; si ha dunque

$$e^{iy} = \left(\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 0 \bmod 2}} \frac{(-1)^m y^{2m}}{(2m)!} \right) + \left(\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 1 \bmod 2}} \frac{(-1)^m y^{2m}}{(2m)!} \right) +$$

$$+i \left(\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 0 \bmod 2}} \frac{(-1)^m y^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) + i \left(\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \equiv 1 \bmod 2}} \frac{(-1)^m y^{2m+1}}{(2m+1)!} \right)$$

e unificando le due coppie di sommatorie

$$e^{iy} = \left(\sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m y^{2m}}{(2m)!} \right) + i \left(\sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m y^{2m+1}}{(2m+1)!} \right)$$

Riconoscendo nella prima serie lo sviluppo di Taylor del coseno e nella seconda quello del seno si ha $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$.

8. Sia f analitica su $\mathbb{C}$ tale che $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, e tale che la sua serie di potenze di 0 abbia raggio di convergenza infinito. Mostrare che, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

   <u>*Soluzione*</u>: Sviluppiamo f in 0; osserviamo che la tesi è equivalente a richiedere che i coefficienti dello sviluppo siano reali:

$$\overline{f(z)} = \overline{\sum_{n \geq 0} a_n z^n} = \sum_{n \geq 0} \overline{a_n z^n} = \sum_{n \geq 0} a_n \overline{z}^n = f(\overline{z})$$

dove per passare la coniugazione sotto serie, si è sfruttata la continuità della coniugazione (i dettagli sono lasciati per esercizio). Mostriamo per induzione su n che i coefficienti sono reali. Intanto, se $n \geq 0$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Come base per l'induzione, $a_0 = f(0) \in \mathbb{R}$, perché $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo $a_{n-1} \in \mathbb{R}$, con $n-1 \geq 0$. Vi sono due strade:

a)
$$\begin{aligned} a_n n! = f^{(n)}(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(0)}{z} = \\ = \lim_{z\to 0} \frac{f^{(n-1)}(z) - a_{n-1}(n-1)!}{z} \end{aligned}$$
Poiché il limite è indipendente dalla direzione rispetto alla quale si tende, possiamo scegliere di muoverci lungo l'asse reale e avere una successione di numeri reali che convergerà certamente a un numero reale per la definizione di limite. Allora $a_n \in \mathbb{R}$.

b) Oppure: la funzione
$$f_n(z) = \frac{f(z) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i}{z^{n-1}} = \frac{\sum_{i\geq n} a_i z^i}{z^{n-1}} = \sum_{i\geq 0} a_{n-i} z^i$$
è ancora tale che $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, perché gli inversi di numeri reali sono reali; ma ora $f_n(0) = a_n$, e quindi anche a_n è reale.

9. Provare che, comunque siano presi $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, si ha:
$$\left|\sum_{j=1}^n a_j b_j\right|^2 = \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2 - \sum_{1\leq k<j\leq n} |a_k \overline{b_j} - a_j \overline{b_k}|^2$$

<u>*Soluzione*</u>: Sviluppando quanto è a destra dell'uguaglianza:
$$\left|\sum_{j=1}^n a_j b_j\right|^2 = \sum_{j=1}^n a_j b_j \sum_{k=1}^n \overline{a_k}\overline{b_k} = \sum_{1\leq j,k\leq n} a_j b_j \overline{a_k}\overline{b_k} =$$
$$= \sum_{1\leq k<j\leq n} a_j b_j \overline{a_k}\overline{b_k} + \sum_{l=1}^n |a_l|^2|b_l|^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n} a_j b_j \overline{a_k}\overline{b_k} =$$
$$= \sum_{1\leq k<j\leq n} a_j b_j \overline{a_k}\overline{b_k} + a_k b_k \overline{a_j}\overline{b_j} + \sum_{l=1}^n |a_l|^2|b_l|^2$$
Sviluppiamo ora i seguenti addendi al secondo membro dell'equazione:
$$\sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2 = \sum_{j=1}^n |a_j|^2|b_j|^2 + \sum_{1\leq k<j\leq n} |a_j b_k|^2 + |a_k b_j|^2$$

e infine:

$$\sum_{1\leq k<j\leq n} |a_k\overline{b_j} - a_j\overline{b_k}|^2 = \sum_{1\leq k<j\leq n} (a_k\overline{b_j} - a_j\overline{b_k})(\overline{a_k}b_j - \overline{a_j}b_k) =$$

$$= \sum_{1\leq k<j\leq n} (|a_kb_j|^2 + |a_jb_k|^2 - a_kb_k\overline{a_j}\overline{b_j} - a_jb_j\overline{a_k}\overline{b_k})$$

Mettendo tutto insieme si ottiene banalmente l'uguaglianza.

10. Sia $\mathbb{C}[[x]] := \{\sum_{j=0}^{\infty} c_jx^j | c_j \in \mathbb{C}, j \in \mathbb{N}\}$. Definiamo le operazioni di somma e prodotto come segue:

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_jx^j + \sum_{j=0}^{\infty} d_jx^j := \sum_{j=0}^{\infty}(c_j + d_j)x^j$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_jx^j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} d_jx^j := \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{s} c^kd^{s-k}x^s$$

Mostrare che $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un anello, detto anello delle serie formali in $\mathbb{C}$. Trovarne gli elementi invertibili.

<u>*Soluzione*</u>: L'unica proprietà non ovvia è l'associatività del prodotto. Siano $\sum_{i\geq 0} a_ix^i$, $\sum_{j\geq 0} b_jx^j$, $\sum_{h\geq 0} c_hx^h \in \mathbb{C}[[x]]$:

$$\left(\sum_{i\geq 0} a_ix^i \cdot \sum_{j\geq 0} b_jx^j\right) \cdot \sum_{h\geq 0} c_hx^h = \sum_{s\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{s} a_kb_{s-k}\right)x^s \cdot \sum_{h\geq 0} c_hx^h =$$

$$= \sum_{l\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{l}\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)c_{l-n}\right)x^l = \sum_{l\geq 0}\sum_{k=0}^{l}\sum_{n=k}^{l} a_kb_{n-k}c_{l-n}x^l$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo scambiato le due somme interne. Di seguito, ponendo $n - k = p$:

$$\sum_{l\geq 0}\sum_{k=0}^{l} a_k\left(\sum_{p=0}^{l-k} b_pc_{l-p-k}\right)x^l = \sum_{i\geq 0} a_ix^i \cdot \left(\sum_{s\geq 0}\sum_{p=0}^{s} b_pc_{s-p}x^s\right) =$$

$$= \sum_{i\geq 0} a_ix^i \cdot \left(\sum_{j\geq 0} b_jx^j \cdot \sum_{h\geq 0} c_hx^h\right).$$

Per quanto riguarda gli invertibili, $\sum_{n\geq 0} a_nx^n$ è invertibile se:

$$\sum_{n\geq 0} a_nx^n \cdot \sum_{n\geq 0} b_nx^n = \sum_{s\geq 0}\sum_{k=0}^{s} a_kb_{s-k}x^s = 1$$

Cioè deve potersi risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ \vdots \\ a_0 b_s + a_1 b_{s-1} + \ldots + a_{s-1} b_1 + a_s b_0 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

nelle incognite $b_j, j \geq 0$, e questo è possibile se e solo se $a_0 \neq 0$. Infatti $b_0 = \frac{1}{a_0}$, e se per induzione forte supponiamo di conoscere tutti i b_j con $j = 0, \ldots, s-1 \geq 0$, allora

$$b_s = \frac{-a_1 b_{s-1} - \ldots - a_{s-1} b_1 - a_s b_0}{a_0}$$