Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. L. Caporaso

Tutori: Luca Schaffler e Dario Spirito

TUTORATO 3
20 OTTOBRE 2010

1. Calcolare:

a) $\log(-\pi)$
b) $\log(e)$
c) $\log(-5+i)$
d) $\log(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$
e) $i^{\sqrt{2}}$
f) $(1+i)^{\sqrt{3}^i}$

Soluzione: Si ha che $\log z = \{\ln|z| + i\mathrm{Arg}(z) + i2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ (dove ln è il logaritmo reale sui reali positivi).

a) $\log(-\pi) = \{\ln|-\pi| + i\mathrm{Arg}(-\pi) + i2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} = \{\ln\pi + i\pi(2k+1) | k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\log e = \{1 + i2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\log(-5+i) = \{\ln|-5+i| + i\mathrm{Arg}(-5+i) + i2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{1}{2}\ln 26 + i(\pi(2k+1) - \arctan\frac{1}{5}) | k \in \mathbb{Z}\}$ osservando che, nel secondo quadrante, l'argomento di $x - iy$ è dato da $\pi - \arctan(y/x)$.

d) $\log\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \{i\pi(2k+\frac{1}{3}) | k \in \mathbb{Z}\}$

e) Per definizione:
$$i^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log i} = \{e^{\sqrt{2}i\pi(\frac{1}{2}+2k)} | k \in \mathbb{Z}\}$$

f)
$$(1+i)^{\sqrt{3}^i} = e^{\sqrt{3}^i\log(1+i)} = \{e^{\sqrt{3}^i(\frac{1}{2}\ln 2 + i\pi(\frac{1}{4}+2k))} | k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$\{e^{e^{i\log\sqrt{3}}(\frac{1}{2}\ln 2 + i\pi(\frac{1}{4}+2k))} | k \in \mathbb{Z}\} =$$
$$\{e^{e^{i(\frac{1}{2}\ln 3 + i2h\pi)}(\frac{1}{2}\ln 2 + i\pi(\frac{1}{4}+2k))} | k, h \in \mathbb{Z}\}$$

2. Sia log la corrispondenza multivoca. Riconoscere la falsità della tesi trovando l'errore:

$$\log(-z)^2 = \log(z^2) \Rightarrow \log(-z) + \log(-z) = \log z + \log z \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z \Rightarrow$$
$$\log(-z) = \log z$$

Soluzione: L'errore è nel passaggio $\log(-z)+\log(-z) = \log z + \log z \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z$. Infatti, per qualunque numero complesso z, $\log z$ è un insieme (log è multivoca); se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$, naturalmente si ha che $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ e $zA = \{za | a \in A\}$. Quindi, tornando all'errore, non si può affermare che $\log(-z)+\log(-z)=2\log(-z)$, perché in realtà $\log(-z)+\log(-z)\supset 2\log(-z)$ come si osserva facilmente da quanto detto. Un altro modo per vedere l'errore è, fissando una determinazione $\mathrm{Log}(z)$,

$$\log(z)+\log(z)=\mathrm{Log}(z)+2i\pi\mathbb{Z}+\mathrm{Log}(z)+2i\pi\mathbb{Z}=2\,\mathrm{Log}(z)+2i\pi\mathbb{Z}\neq$$

$$\neq 2\,\mathrm{Log}(z)+4i\pi\mathbb{Z}=2(\mathrm{Log}(z)+2i\pi\mathbb{Z})=2\log(z)$$

3. Determinare tutti i numeri complessi z tali che i^z assume solo valori reali.

   <u>*Soluzione*</u>:

$$i^z=\exp(z\log(i))=\exp\left(\left\{(x+iy)i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)|k\in\mathbb{Z}\right\}\right)=$$

$$\exp\left(\left\{\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)y+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)x|k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$$

   La parte che dipende da y è sempre reale, mentre perché lo sia quella che dipende da x si deve avere, per ogni $k\in\mathbb{Z}$, un $k'\in\mathbb{Z}$ tale che

$$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)x=2k'\pi \iff \left(\frac{1}{2}+2k\right)x=2k' \iff k'=\frac{x}{4}+kx\in\mathbb{Z} \iff x\in 4\mathbb{Z}$$

4. Trovare l'immagine tramite la mappa esponenziale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:
   a) $\{z|\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Re}(z)^2\}$
   b) $\{z|\phi<\mathrm{Im}(z)<\theta\}$, dove $\theta-\phi\in(0,2\pi)$
   c) $\{z|\mathrm{Re}(z)>0, 0<\mathrm{Im}(z)<2\pi\}$

   <u>*Soluzione*</u>:

   a) Il dominio non è altro che la parabola $y=x^2$, ovvero $\{t+it^2|t\in\mathbb{R}\}$. Quindi l'immagine del dominio è $\{e^{t+it^2}|t\in\mathbb{R}\}=\{e^t(\cos t^2+i\sin t^2)|t\in\mathbb{R}\}$, che è una spirale che parte da 0, 0 escluso: consideriamo infatti un punto che si muove sulla parabola da 0 verso destra. In questo caso aumenta sia la parte reale (ovvero l'esponenziale del punto si allontana dall'origine) sia la parte immaginaria, che tende a infinito, facendo quindi ruotare l'esponenziale di un giro completo ogni volta che la parte immaginaria aumenta di 2π. Allo stesso modo se il punto si muove da 0 verso sinistra, il suo esponenziale continuerà a ruotare ma avvicinandosi a 0.

   b) Se $z\in\{z|\phi<\mathrm{Im}(z)<\theta\}$, $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$, dove $x\in(-\infty,+\infty)$ e $y\in(\phi,\theta)$, quindi in coordinate polari, il dominio immagine è lo spicchio $\{z|\phi<\mathrm{Arg}(z)<\theta\}$ (notare che lo zero è implicitamente escluso nel dominio perchè 0 non possiede argomento).

   c) Considerato $e^x(\cos y+i\sin y)$, i punti nell'immagine hanno argomento in $(0,2\pi)$, ma modulo che varia tra 1 e ∞, quindi l'immagine del dominio è $\{z||z|\geq 1, 0<\mathrm{Arg}(z)<2\pi\}$.

5. Determinare una trasformazione lineare fratta che mandi le seguenti terne (ordinate) di punti di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in quelle corrispondenti:
   a) $(0, 1, \infty)$ in $(0, \infty, 1)$
   b) $(1, 2, i)$ in $(3, i, 2i)$
   c) $(1, \omega, \omega^2)$ in $(2, 2+i, \infty)$ dove $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$
   d) $(0, 1, 2)$ in $(0, 1, \infty)$
   e) $(0, 1, 2)$ in $(2, 1, 0)$

   <u>*Soluzione*</u>: La soluzione si può determinare meccanicamente imponendo le condizioni (lineari) $f(a_i) = b_i$, dove (a_i) e (b_i) sono le terne di punti e sfruttando l'ambiguità di a, b, c, d, che sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità:
   a) $0 \to 0 \implies b = 0$, $\infty \to 1 \implies$ il denominatore è $z - 1$ (sfrutto il grado di libertà); quindi $f(z) = \frac{az}{z-1}$ e poiché $\infty \to 1$, $a = 1$.
   b) Applicando le condizioni si ha
   $$\begin{cases} a + b = 3(c + d) \\ 2a + b = i(2c + d) \\ ai + b = 2i(ci + d) \end{cases}$$
   da cui una soluzione possibile è $a = 149$, $b = -200 - 9i$, $c = 8 - 95i$, $d = -25 + 92i$.
   c) $a = \omega^2$, $b = -(1-2i)\omega^2 - (2-4i)\omega + 2 - 6i$, $c = 1$, $d = -i(3 - \omega^2 - (2+i)\omega)$
   d) $b = 0$, il denominatore è $z - 2$; quindi $\frac{a*1}{1-2} = 1 \implies a = -1$
   e) $f(z) = z - 1$

6. Determinare una trasformazione lineare fratta che manda le seguenti rette/circonferenze nelle corrispondenti:
   a) $\mathbb{R}$ in $i\mathbb{R}$
   b) $\mathbb{R}$ nella circonferenza unitaria S^1
   c) $\{z = x + iy \in \mathbb{C} | (x-1)^2 + y^2 = 4$ in $\{z = x + iy \in \mathbb{C} | x + y = 2\}$
   d) $\{z = x + iy \in \mathbb{C} | (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ in $\{z = x + iy \in \mathbb{C} | x + y = 0\}$

   Per ogni trasformazione determinare inoltre l'immagine della seconda retta/circonferenza.

   <u>*Soluzione*</u>: Poiché una retta/circonferenza è determinata da tre punti, è sufficiente scegliere tre punti della prima retta e portarli nella seconda, procedendo come nell'esercizio precedente; ovviamente la trasformazione non è unica perché si possono scegliere diverse terne di punti.
   a) Basta una rotazione di 90°: $f(z) = iz$, e l'immagine di $i\mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$.
   b) Ad esempio ponendo $f(\infty) = 1$, $f(0) = i$ e $f(-1) = -1$ si ha $a = c = 1$ e $f(z) = \frac{z+b}{z+d}$ da cui $b = id$ e $-1(-1+d) = -1 + id \implies d = \frac{2}{1+i} = 1 - i$, cioè $f(z) = \frac{z+i+1}{z+1-i}$, da cui $f(1) = \frac{2+i}{2-i} = \frac{1}{5}(3+4i)$; $i - 1 \notin S^1$, e quindi S^1 si trasforma nella retta che passa per -1 e $\frac{1}{5}(3+4i)$.

c) Una possibile trasformazione è $f(z) = \frac{-2iz-10i}{z-3}$, che porta la seconda retta nella circonferenza passante per $-2i$, $14i$ e $\frac{8+38i}{169}$.

d) Una possibilità è $f(z) = \frac{2-i}{5}\frac{z-2-2i}{z-2i}$, che porta la seconda retta nella circonferenza che passa per $\frac{1}{5}(1-3i)$, $\frac{1}{5}(1-2i)$ e $\frac{1}{5}(3-4i)$.

7. Mostrare che il gruppo delle trasformazioni lineari fratte è isomorfo al gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, denotato con $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

<u>*Soluzione*</u>: Chiameremo tlf una trasformazione lineare fratta $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $\widehat{\mathbb{C}}$ denoterè la compattificazione di Alexandroff del piano complesso, ovvero $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sia TLF il gruppo delle tlf invertibili (cioè con $ad - bc \neq 0$). Sia $\phi : \mathrm{TLF} \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ tale che se $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$:

$$f \mapsto \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$$

ϕ è ovviamente ben posta perché tlf con coefficienti proporzionali vanno nella stessa classe di matrici. Altrettanto ovvia è la suriettività perché una proiettività è invertibile e quindi la classe di matrici che la rappresenta è composta da elementi invertibili, che determinano una tlf non degenere. Vediamo che ϕ è un omomorfismo di gruppi. Se:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \; g(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$$

allora:

$$\phi(f \circ g) = \left[\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] = \phi(f)\phi(g)$$

dove la prima uguaglianza segue da un calcolo diretto di $f \circ g(z)$. Per l'iniettività, se $\phi(f) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$ con $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, segue che $\exists\; w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ t.c.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $a = w = d, b = 0 = c$, quindi $f(z) = \frac{wz}{wz} = z$, cioè f è l'elemento neutro di TLF.