Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. L. Caporaso

Tutori: Luca Schaffler e Dario Spirito

Tutorato 4
27 ottobre 2010

1. Mappare in maniera conforme i seguenti domini sul (cioè suriettivamente) disco aperto unitario:
   a) $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) > 0\}$
   b) $\{z \in \mathbb{C} || z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$
   c) $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$
   d) $\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1, 0 < \mathrm{Arg}(z) < \frac{\pi}{3}\}$
   e) $\{z \in \mathbb{C} | -\mathrm{Re}(z) - 1 < \mathrm{Im}(z) < -\mathrm{Re}(z) + 1\}$
   f) $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) > 0\}$
   g) Vedi 1 bis.
   h) L'esterno della parabola $y^2 = 2px$, cioè quella regione non contenente il fuoco, dove $p > 0$, in maniera tale che $0 \mapsto 1$ e $-\frac{p}{2} \mapsto 0$.

1 bis. Mappare $\{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\} \setminus \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) = 0, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ nel rettangolo di vertici 0, $\ln 2$, $2i\pi$ e $\ln 2 + 2i\pi$.

<u>*Soluzione*</u>: Nel corso di questo esercizio le parole "retta" e "circonferenza" verranno usati come sinonimi.

a) $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ fa al caso nostro perché l'asse immaginario viene mappato in S_1, come si vede calcolando le immagini di $-i, 0, i$, e 1 viene mappato in zero, il che significa che il semipiano destro in questione va sul disco.

b) La regione considerata è delimitata da due rette che si incontrano in due punti; portando ad esempio -1 in 0, 0 in 1 e 1 in ∞ attraverso $f_1(z) = \frac{-z-1}{z-1} = \frac{z+1}{1-z}$ verrà mappata in una regione delimitata dall'asse reale (immagine dell'asse reale secondo f_1) e una retta che incontra la prima in 0 (con un angolo di 90°) e infinito, ovvero l'asse immaginario; poiché $f_1(i/2) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, la regione di arrivo è il primo quadrante. Con $f_2(z) = z^2$ esso si trasforma nel semipiano superiore, che può essere mappato nel disco unitario con $f_3(z) = \frac{z-i}{z+i}$, analogamente a quanto fatto nell'esercizio precedente; la trasformazione cercata è quindi

$$f(z) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) = \frac{(f_2 \circ f_1)(z) - i}{(f_2 \circ f_1)(z) + i} = \frac{f_1(z)^2 - i}{f_1(z)^2 + i} =$$

$$= \frac{\left(\frac{z+1}{1-z}\right) - i}{\left(\frac{z+1}{1-z}\right) + i} = \frac{(z+1)^2 - i(1-z)^2}{(z+1)^+ i(1-z)^2}$$

c) Basta prendere $f(z) = z^2$.

d) Attraverso $f_1(z) = z^3$ ci si riduce al punto b.

e) La regione non è altro che la striscia di ampiezza $\sqrt{2}$ compresa tra le rette $y = -x + 1$ e $y = -x - 1$, quindi la rotazione $f_1(z) = ze^{i\frac{\pi}{4}}$ manda A in $\{x + iy| - \frac{\sqrt{2}}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2}\}$. Successivamente applichiamo $f_2(z) = z + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $f_3(z) = \frac{z\pi}{\sqrt{2}}$ ottenendo la striscia $\{z \in \mathbb{C}|\mathrm{Im}(z) \in (0, \pi)\}$ che possiamo mappare nel semipiano superiore tramite l'esponenziale $f_4(z) = e^z$. Infine, con la consueta $f_5(z) = \frac{z-1}{z+1}$ si ottiene il disco unitario, e

$$f(z) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) = \frac{\exp\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(ze^{i\frac{\pi}{4}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] - 1}{\exp\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(ze^{i\frac{\pi}{4}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + 1}$$

f) La regione è sconessa, quindi (essendo ogni applicazione confrome olomorfa e ogni olomorfa continua) non è possibile mandarla suriettivamente sul disco unitario, che è connesso.

g) Vedi 1 bis.

h) L'idea è osservare che le parabole di secondo grado in y con il fuoco in 0 vengono mandate tramite estrazione di radice in rette parallele all'asse reale (per provarlo è semplice fare il procedimento inverso...). Quindi, poiché il fuoco ha coordinate $(\frac{p}{2}, 0)$, consideriamo:

$$z_1 = z - \frac{p}{2}$$

Dopo la traslazione, la parabola diventa $x = \frac{y^2}{2p} - \frac{p}{2}$. Poi consideriamo la retta $\{t + ri|t \in \mathbb{R}\} =: \mathcal{R}$, e determiniamo r affinché i suoi punti al quadrato vengano mandati nella parabola $x = \frac{y^2}{2p} - \frac{p}{2}$. Ma:

$$(t + ri)^2 = t^2 - r^2 + 2tri \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = t^2 - r^2 \Rightarrow x = \frac{y^2}{4r^2} - r^2 \\ y = 2tr \Rightarrow t = \frac{y}{2r} \end{cases}$$

quindi eguagliando le due equazioni $x = \frac{y^2}{4r^2} - r^2$ e $x = \frac{y^2}{2p} - \frac{p}{2}$, si ottiene che $r = \sqrt{\frac{p}{2}}$. Dobbiamo ora capire quale determinazione della radice manda la parabola in $\mathcal{R}$, ma questo è facile perché basta scegliere una determinazione e seguire l'immagine di un punto. Quindi sia

$$z_2 = e^{\frac{1}{2}(\mathrm{Log} z_1 + 2ik\pi)} =: f(z_1), k = 0, 1.$$

Vorremmo che, ad esempio, $-\frac{p}{2}$ sia mandato sulla retta $\mathcal{R}$, e si verifica che $k = 0$ è l'unica scelta possibile. Poiché $f(1) = \sqrt{e}$, abbiamo mandato la regione interessata in $\{z|\mathrm{Im}(z) > i\sqrt{\frac{p}{2}}\}$. Per mandarla nel disco unitario consideriamo:

$$z_3 = z_2 - i\sqrt{\frac{p}{2}}$$

che trasla $\mathcal{R}$ sull'asse reale,

$$z_4 = z_3 e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

che ruota in senso orario di $\frac{\pi}{2}$,

$$z_5 = \frac{z_4 - 1}{z_4 + 1}$$

che manda il tutto sul disco unitario. Attraverso tutte le trasformazioni elencate, si ha che:

$$0 \mapsto -1, -\frac{p}{2} \mapsto \frac{\sqrt{\frac{p}{2}}(\sqrt{2}-1)-1}{\sqrt{\frac{p}{2}}(\sqrt{2}-1)+1} =: w$$

Pertanto componendo ancora con

$$z_6 = -z_5$$

0 viene mandato in 1 e, poiché $|w| < 1$, con un adeguato isomorfismo del disco unitario si può mandare w in 0 e fissare $B_1(0)^c$.

1 bis) È sufficiente applicare il logaritmo nella regione $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}$

2. Trovare tutte le trasformazioni lineari fratte che scambiano tra loro la retta reale e la circonferenza unitaria.

   Soluzione: $\mathbb{R}$ e S^1 hanno in comune due punti (1 e -1), e così (ovviamente) dev'essere dopo la trasformazione; quindi o rimangono entrambi fissi o si scambiano. Poiché la circonferenza deve diventare una retta, uno dei suoi punti, diverso da 1 e -1 (sia c) deve essere mandato in ∞; quindi il denominatore è (a meno di costanti che però possono essere inglobate nel numeratore) nella forma $f(z) = \frac{az+b}{z-c}$. Imponendo che i punti d'intersezione siano fissi si ha

$$\begin{cases} a + b = 1 - c \\ -a + b = 1 + c \end{cases}$$

   e sommandole $2b = 2$, ovvero $b = 1$, e di conseguenza $a = -c$; ovvero $f(z) = \frac{-cz+1}{z-c}$ che manda ∞ in $-c$, che è ancora un punto di S^1, e quindi $\mathbb{R}$ in S^1 (osserviamo che la condizioni imposte garantiscono che S^1 si traformi in $\mathbb{R}$). Se invece 1 e -1 si scambiano si ottiene

$$\begin{cases} a + b = -1 + c \\ -a + b = -1 - c \end{cases}$$

   sommando le quali si ha $2b = -2$, quindi $b = -1$ e $a = c$, e $f(z) = \frac{cz-1}{z-c}$, e come prima $f(\infty) = c \in S^1$, e la trasformazione ha la proprietà voluta.

3. Calcolare $\oint_\gamma z^n \mathrm{d}z$, dove γ è la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario e $n \in \mathbb{Z}$.

   <u>*Soluzione*</u>: Parametrizzando γ come $\{e^{it}, t \in [0, 2\pi)\}$ si ottiene

$$\oint_\gamma z^n \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{int} i e^{it} \mathrm{d}t = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \mathrm{d}t$$

   Se $n = -1$ allora l'integrale è $2\pi i$, altrimenti si ottiene $\int = \frac{1}{n+1} e^{i(n+1)t}|_0^{2\pi} = 0$.

4. Calcolare $\int_A z^3 \mathrm{d}z$, $A := \{x + iy | y = x^2 + 1, x \in (0, 1)\}$, dove il verso di percorrenza è antiorario.

   <u>*Soluzione*</u>: $A := \{x + iy | y = x^2 + 1, y \in (1, 2)\} = \{t + i(t^2 + 1) | t \in (-1, 1)\}$ e la curva è C^1, quindi:

$$\int_A z^3 \mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} (t + i(t^2 + 1))^3 (1 + i2t) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^3 - i(t^2 + 1)^3 + 3t^2 i(t^2 + 1) - 3t(t^2 + 1)^2)(1 + i2t) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^3 - i(t^6 + 1 + 3t^4 + 3t^2) + 3t^4 i + i3t^2 - 3t(t^4 + 1 + 2t^2))(1 + i2t) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-1}^{1} (-5t^3 - it^6 - 3t^5 - 3t - i)(1 + i2t) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-1}^{1} (2t^7 - 3t^5 - 5t^3 - t) + i(-7t^6 - 10t^4 - 6t^2 - 1) \mathrm{d}t =$$

$$= i \int_{-1}^{1} -7t^6 - 10t^4 - 6t^2 - 1 \mathrm{d}t = 2i \int_0^1 -7t^6 - 10t^4 - 6t^2 - 1 \mathrm{d}t =$$

$$= 2i \left[-t^7 - 2t^5 - 2t^3 - t\right]_0^1 = -12i$$

5. Sia $P \in \mathbb{C}[z]$, $a \in \mathbb{C}$ e $R \in \mathbb{R}^+$. Calcolare:

$$\oint_{|z-a|=R} P(z) \mathrm{d}\overline{z}$$

   dove il verso di integrazione è quello antiorario e $\mathrm{d}\overline{z} = \overline{z'(t)} \mathrm{d}t$.

   <u>*Soluzione*</u>: Iniziamo col supporre $a = 0$. Se $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$:

$$I := \oint_{|z|=R} P(z) \mathrm{d}\overline{z} = -iR \int_0^{2\pi} P(Re^{it}) e^{-it} \mathrm{d}t =$$

$$= -iR \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{n} a_j R^j e^{it(j-1)} \mathrm{d}t = -iR \sum_{j=0}^{n} a_j R^j \int_0^{2\pi} e^{it(j-1)} \mathrm{d}t =$$

$$= -iR\left(a_0\int_0^{2\pi} e^{-it} + a_1R\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t + \sum_{j=2}^{n} a_jR^j\int_0^{2\pi} e^{it(j-1)}\mathrm{d}t\right) =$$

$$= -iR\left(a_1R2\pi + \sum_{j=2}^{n} a_jR^j\left[\frac{e^{it(j-1)}}{i(j-1)}\right]_0^{2\pi}\right) = -iR^2a_12\pi$$

Pertanto $I = -iR^2P'(0)2\pi$. Se ora a è un qualunque numero complesso, posto $z-a=w \Rightarrow \mathrm{d}\overline{z} = \overline{z'(t)}\mathrm{d}t = \overline{w'(t)}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\overline{w}$:

$$\oint_{|z-a|=R} P(z)\mathrm{d}\overline{z} = \oint_{|w|=R} P(a+w)\mathrm{d}\overline{w} =$$

e se $P(a+w) = Q(w)$

$$= \oint_{|w|=R} Q(w)d\overline{w} = -iR^2Q'(0)2\pi = -iR^2P'(a)2\pi.$$

6. Sia $L(r)$ la circonferenza di raggio r di centro l'origine percorsa in senso antiorario, e sia f una funzione continua. Mostrare che

$$\lim_{r\to 0}\oint_{L(r)} \frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z = 2i\pi f(0)$$

<u>*Soluzione*</u>: Parametrizzando $L(r)$ come $\{re^{it}, t \in [0, 2pi)\}$ si ha

$$L := \lim_{r\to 0}\oint_{L(r)} \frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\mathrm{d}t = i\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\mathrm{d}t$$

Ora

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})\mathrm{d}t - 2\pi f(0) = \int_0^{2\pi} (f(re^{it}) - f(0))\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} \epsilon\mathrm{d}t = 2\pi\epsilon$$

per ogni ϵ per r sufficientemente vicino a 0, e $L = 2i\pi f(0)$.