Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. L. Caporaso

Tutori: Luca Schaffler e Dario Spirito

TUTORATO 5
2 NOVEMBRE 2010

1. Calcolare $\int_C \sin z \mathrm{d}z$ ove $C := \{|z-1|=1\} \cap \{z|\mathrm{Im}(z) < 0\}$.

   Soluzione: Poiché il calcolo diretto potrebbe risultare laborioso, sfruttiamo il teorema di Cauchy su dischi. $\sin z$ è analitica su $\Delta := B_3(0)$. Definiamo $\gamma = C \cup S$ ove $S = \{t|0 < t < 2\}$. Poiché $\gamma \subseteq \Delta$, si ha che:

$$\oint_{\gamma^+} \sin z dz = \oint_C + \oint_S \sin z dz = 0 \Rightarrow$$

$$\oint_C \sin z dz = -\oint_S \sin z dz = \oint_S \sin z dz = \int_0^2 \sin t dt =$$
$$= -[\cos t]_0^2 = 1 - \cos 2$$

2. Calcolare i seguenti integrali, tenendo presente che il verso di percorrenza delle curve è quello antiorario e che sono percorse una sola volta:

   a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cosh(z)}{z^2} \mathrm{d}z$

   b) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 e^{z^2}} \mathrm{d}z$

   c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2} + 4\sin z}{z^4} \mathrm{d}z$

   d) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z}{\sin(z)} \mathrm{d}z$

   e) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{p(z)}{z^n} \mathrm{d}z$, $p \in \mathbb{C}[z]$, $n \in \mathbb{N}$

   f) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^n} \mathrm{d}z$, $n \in \mathbb{N}$

   g) $\displaystyle\oint_B \frac{\sin z}{z(z-\frac{1}{2})} \mathrm{d}z$, $B := \{x+iy||x| \leq 1, |y| = 1\} \cup \{x+iy||x| = 1, |y| \leq 1\}$

   h) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{\cos z}}{(z-1)(z-3i)} \mathrm{d}z$, $C := \{x+iy|\frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$

   i) $\displaystyle\oint_D \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z-i)^3} \mathrm{d}z$, $D := \{|z-i| = r\}$, $0 < r < 1$, $\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash\{x \geq 0\} \to \mathbb{C}$ e $\mathrm{Log}(z) = \log_* |z| + i\mathrm{Arg}(z)$ con $\mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$

   Soluzione: Tutti gl integrali si risolvono attraverso la formula di Cauchy per le derivate:

   a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cosh(z)}{z^2} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1} \cosh^{(1)}(0) = 2\pi i \sinh(0) = 0$

b) Prendendo $f(z) = \frac{e^z}{e^{z^2}}$ si ha

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 e^{z^2}} \mathrm{d}z = 2\pi i \left(\frac{e^z}{e^{z^2}}\right)'(0) = 2\pi i \left.\frac{e^z e^{z^2} - 2ze^{z^2}e^z}{e^{2z^2}}\right|_0 = 2\pi i$$

c) Derivando tre volte

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2} + 4\sin z}{z^4} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{6}(e^{z^2} + 4\sin z)^{(3)}(0) = \frac{i\pi}{3}(-4\sin(0) + (2ze^{z^2})''(0)) =$$

$$= \frac{i\pi}{3}(2e^{z^2} + 4z^2 e^{z^2})'(0) = \frac{i\pi}{3} e^{z^2}(4z + 8z + 8z^3)|_0 = \frac{i\pi}{3}$$

d) $\frac{z}{\sin(z)}$ è continua (e olomorfa) in 0 ($\frac{\sin z}{z}$ è un limite notevole...), e gli altri zeri del seno son $k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$, e quindi con modulo maggiore di 1. per il teorema di Cauchy su dischi l'integrale è 0.

e) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{p(z)}{z^n} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(n-1)!} p^{(n-1)}(0)$, ovvero $\frac{2\pi i}{(n-1)!}$ per il coefficiente di grado $n-1$ del polinomio.

f) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^n} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cos^{(n-1)}(0)$; osserviamo che $\cos^{(k)}(0)$ è periodicmaente uguale a 1, 0, -1, 0, e quindi l'integrale vale 0 se $n \equiv 0 \bmod 2$ mentre vale $\frac{2\pi i}{(n-1)!}$ se $n \equiv 1 \bmod 4$ e $-\frac{2\pi i}{(n-1)!}$ se $n \equiv 3 \bmod 4$.

g) La curva B è continua e C^1 a tratti. $f(z) := \frac{\sin z}{z}$, $\Delta := B_2(0)$. $B \subseteq \Delta$, f è olomorfa in $\Delta \backslash \{0\}$, in 0 ha una singolarità eliminabile ($\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} z = 0$) e $\frac{1}{2} \in \Delta \backslash (B \cup \{0\})$, dunque siamo nelle ipotesi per poter applicare la formula di Cauchy su dischi:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) n\left(B, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_B \frac{f(z)}{z - \frac{1}{2}}$$

allora, poiché $n(B, \frac{1}{2}) = 1$:

$$\oint_B \frac{\sin z}{z(z - \frac{1}{2})} = 4\pi i \sin\frac{1}{2}$$

h) Vorremmo applicare la formula di Cauchy. Prendiamo $\Delta := B_{\frac{5}{2}}(0)$. $C \subseteq \Delta$ ed è C^1, e se definiamo $f(z) := \frac{e^{\cos z}}{z - 3i}$, questa è olomorfa su Δ. Inoltre $1 \in \Delta \backslash C$, pertanto:

$$f(1) n(C, 1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-1} dz$$

e quindi

$$\oint_C \frac{e^{\cos z}}{(z-3i)(z-1)} dz = 2\pi i \frac{e^{\cos 1}}{1 - 3i}$$

i) In questo caso verrà utile la formula di Cauchy in combinazione con la formula di derivazione sotto integrale. In primo luogo sia $r < \rho < 1$ e lavoriamo nel dominio $\Delta := B_\rho(i)$, nel quale Log è olomorfa. Per ogni $z \in \Delta \backslash D$, per la formula di Cauchy:

$$\mathrm{Log}(z) n(D, i) = \mathrm{Log}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathrm{Log}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Essendo Log continua su D, applicando la formula di derivazione:

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathrm{Log}(z) = -\frac{1}{z^2} = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathrm{Log}(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta$$

in particolare se $z = i$:

$$\oint_C \frac{\mathrm{Log}(z)}{(z-i)^3} dz = \pi i$$

3. Verificare che $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} \mathrm{d}z = 0$. Si può concludere da questo che $\displaystyle\frac{1}{z^2+1}$ è la derivata di una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$?

<u>*Soluzione*</u>: $\displaystyle\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}$ e quindi

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} \mathrm{d}z = \oint_{|z|=2} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) \mathrm{d}z = 2i\pi - 2i\pi = 0$$

dal teorema di Cauchy. Per applicare il teorema di Morera dovremmo avere che l'integrale è 0 lungo ogni curva chiusa in $\{|z| \leq 2\}$. Ma se γ è la circonferenza di centro i e raggio 1, l'integrale è $2i\pi$, e $\displaystyle\frac{1}{z^2+1}$ non può essere la derivata di una funzione olomorfa in questa regione, e neppure in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. Sia f una funzione intera tale che $|f(z)| < |z|^n$ per tutti i z di modulo sufficientemente grande. Dimostrare che f è un polinomio di grado al più n.

<u>*Soluzione*</u>: I polinomi di grado n sono tutte e sole le funzioni olomorfe la cui $(n+1)$-esima derivata si annulla identicamente (come si può vedere, ad esempio, intregrando $n+1$ volte la funzione 0). L'idea è di modificare la dimostrazione del teorema di Liouville:

$$|f^{(n+1)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z|} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} \mathrm{d}\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z| = R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+2}} |\mathrm{d}\zeta|$$

dove $|\mathrm{d}\zeta| = |z'(t)| \mathrm{d}t$ quando si passa alla parametrizzazione. Ora $|\zeta - z|^{n+2} = R^{n+2}$, mentre $|z| = |z - \zeta + \zeta| \leq |z - \zeta| + |\zeta| = R + |\zeta| \leq 2R$ per R abbastanza grande. Inserendo tutto

$$|f^{(n+1)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z| = R} \frac{(2R)^n}{R^{n+2}} |d\zeta| = \frac{n!}{2\pi i} \frac{2^n}{R^2} \oint_{|\zeta - z| = R} |d\zeta|$$

L'ultimo integrale non è altro che la lunghezza della curva d'integrazione, ovvero $2\pi R$; quindi

$$|f^{(n+1)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi i} \frac{2^n}{R^2} 2\pi R = \frac{c}{R}$$

dove c è una costante che non dipende né da R né da z. Mandando R a infinito si ottiene $|f^{(n+1)}(z)| \leq 0$, ovvero $f^{(n+1)} = 0$, da cui la tesi.

5. Calcolare tutti i possibili integrali di $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ lungo circonferenze che non passino per 0, 1, 2.

   Soluzione: Spezzando in frazioni parziali si ha

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2} = \frac{A(z-1)(z-2) + Bz(z-2) + Cz(z-1)}{z(z-1)(z-2)}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -3A - 2B - C = 0 \\ 2A - 2B - 2C = 1 \end{cases}$$

   da cui $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{3}$ e $C = \frac{1}{12}$. Quindi, applicando il teorema di Cauchy, se γ non circonda nessun punto si ha $\int = 0$, se li circonda tutti $\int = 2\pi i(A + B + C) = 0$, se circonda solo 0 (rispettivamente 1, 2) si avrà $\int = 2\pi i A = \frac{\pi i}{4}$ (rispettivamente $\int = 2\pi i B = -\frac{2\pi i}{3}$, $\int = 2\pi i C = \frac{\pi i}{6}$); se circonda 0 e 1 sarà $\int = 2\pi i(A + B) = -\frac{\pi i}{6}$ e se circonda 1 e 2 $\int = 2\pi i(B + C) = -\frac{\pi i}{2}$. (Non può contenere solo 0 e 2 perché 1 è contenuto in ogni convesso che contiene 0 e 2).

6. Siano f e g funzioni intere tali che $|f(z)| < |g(z)|$ per tutti i $z \in \mathbb{C}$. Cosa si può concludere su g?

   Soluzione: g non ha zeri (altrimenti $0 > |f(z)| \geq 0$); quindi la funzione $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ è olomorfa su $\mathbb{C}$, e dalla condizione segue che $|h(z)| < 1$, e per il teorema di Liouville deve essere costantemente c. Quindi $f(z) = cg(z)$, ovvero $g(z) = c^{-1}f(z)$ è un multiplo complesso di f.

7. Siano f e g funzioni intere, e sia $I(R) = \displaystyle\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{g(z)} \mathrm{d}z$. I (come funzione da $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{C}$) è continua? Se sì, è anche analitica? Se no, quali sono i suoi punti di discontinuità?

   Soluzione: $I(R)$ non è definito se $g(z)$ ha uno zero di modulo R; quindi la domanda è sottilmente malposta. Escludendo questi punti, $I(R)$ può avere una discontinuità solo in corrispondenza dei moduli degli zeri di $g(z)$, mentre negli intervalli tra questi è costante, perché (se $r_1 - \epsilon$ e $r_2 + \epsilon$ sono due moduli consecutivi) in $\{r_1 < |z| < r_2\}$ la funzione $\frac{f(z)}{g(z)}$ è olomorfa, e quindi $\{|z| = r_1\}$ e su $\{|z| = r_2\}$ non sono altro che due curve in $\{|z| < r_2 + \frac{\epsilon}{2}\}$.

8. Sia $p \in \mathbb{C}[z]$, $\gamma_r := \{|z| = r > 0\}$ percorsa in senso antiorario. Calcolare $\displaystyle\oint_{\gamma_r} \frac{p'(z)}{p(z)} \mathrm{d}z$

<u>*Soluzione*</u>: Sia $n := \deg(p)$. Per il teorema fondamentale dell'algebra, $p(z) = (z - a_1) \dots (z - a_n)$. $p'(z) = \sum_{j=1}^n \Pi_{j \neq k=1,\dots,n} (z - a_k)$, allora $\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - a_j}$. Infine:

$$\oint_A \frac{p'(z)}{p(z)} dz = \oint_A \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - a_j} dz = \sum_{j=1}^n n(A, a_j)$$

9. Sia $\rho > 0$ e $a \in \mathbb{C}$ con $|a| \neq \rho$. Calcolare

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z - a|^2}$$

mostrando preliminarmente che $|dz| = -i\rho \frac{\mathrm{d}z}{z}$.

10. $z(t) = \rho e^{it} \Rightarrow dz = i\rho e^{it} dt = izdt \Rightarrow dt = \frac{-idz}{z}$. $|dz| = |z'(t)|dt = \rho dt = -i\rho \frac{dz}{z}$. Quindi:

$$I := \oint_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{(z - a)(\overline{z} - \overline{a})} = \oint_{|z|=\rho} \frac{-i\rho}{z(z - a)(\overline{z} - \overline{a})} dz =$$

$$= \oint_{|z|=\rho} \frac{i\rho}{(z - a)(\overline{a}z - \rho^2)} dz$$

Supponendo $a \neq 0$:

$$I = \frac{i\rho}{\overline{a}} \oint_{|z|=\rho} \frac{1}{(z - a)(z - \frac{\rho^2}{\overline{a}})} dz$$

Se $|a| < \rho \Rightarrow |\frac{\rho^2}{\overline{a}}| > \rho$, quindi se $\Delta = B_r(0)$ con $\rho < r < |\frac{\rho^2}{\overline{a}}|$, possiamo applicare la formula di Cauchy a $f(z) = \frac{1}{z - \frac{\rho^2}{\overline{a}}}$:

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z - a} dz = 2\pi i f(a) = 2\pi i \frac{1}{a - \frac{\rho^2}{\overline{a}}}$$

quindi:

$$I = \frac{2\pi\rho}{\rho^2 - |a|^2}$$

Se $|a| > \rho$, ragionando nello stesso modo, si ottiene $I = \frac{2\pi}{\rho^2 - |a|^2}$; se $a = 0$ si ha

$$I = \oint |z| = \rho \frac{-i\rho}{z|z|} \mathrm{d}z = \oint |z| = \rho \frac{-i\rho}{z\rho} \mathrm{d}z = -i \oint_{|z|=\rho} \frac{1}{z} \mathrm{d}z = -i(2\pi i) = 2\pi$$