Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. L. Caporaso

Tutori: Luca Schaffler e Dario Spirito

TUTORATO 6
10 NOVEMBRE 2010

1. Diciamo che la funzione $f(z)$ è olomorfa in $z = \infty$ se $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ è olomorfa in $z = 0$; allo stesso modo diciamo che f ha un polo all'infinito se g ha un polo in 0, con lo stesso ordine.

    a) Determinare tutte le funzioni $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfe in $\hat{\mathbb{C}}$.
    b) Determinare tutte le funzioni intere con un polo all'infinito.

    Soluzione:

    a) f deve essere olomorfa su $\mathbb{C}$, quindi in particolare è intera; inoltre deve essere continua all'infinito, e quindi esiste un $c \in \mathbb{C}$ tale che $\lim_{z\to\infty} f(z) = c$. Per la definizione di limite, se $\varepsilon = 1$, esiste $R > 0$ t.c. $\forall\ |z| > R$, $|c| - 1 < |f(z)| < |c| + 1$. Se poi M è il massimo di f in $\overline{B_R(0)}$ (che esiste per il teorema di Weierstrass) posto $M' := \max\{|c| + 1, M\}$, $|f(z)| < M'$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Essendo f limitata e intera, per il teorema di Liouville è costante.

    b) Se ∞ è un polo per f, vuol dire, per definizione, che 0 è un polo per la funzione $g(z) := f(\frac{1}{z})$. Se questo polo ha ordine $n \geq 1$, allora $g(z) = \frac{h(z)}{z^n}$ con h analitica in un intorno di 0 e $h(0) \neq 0$. Sviluppando h con la formula di Taylor in 0, $g(z) = \frac{1}{z^n}(h(0) + h'(0)z + \ldots + h^{(n-1)}(0)z^{n-1} + l(z)z^n) = \frac{h(0)}{z^n} + \ldots + \frac{h^{(n-1)}(0)}{z} + l(z)$, dove l è analitica in un intorno di 0. Quindi $f(z) = g(\frac{1}{z}) = h(0)z^n + \ldots + h^{(n-1)}(0)z + L(z)$ dove $L(z) = l(\frac{1}{z})$ è olomorfa in un intorno di ∞. Ma visto che $L(z) = f(z) - (h(0)z^n + \ldots + h^{(n-1)}(0)z)$, L è anche intera. Dunque per quanto precedentemente mostrato, L è costante per Liouville e $f(z) = h(0)z^n + \ldots + h^{(n-1)}(0)z + L$ che è un polinomio.

    Oppure: avere un polo di ordine n in 0 è equivalente a dire (per una funzione h) che esistono due costanti c_1 e c_2 tali che $\frac{c_1}{|z|^n} < |h(z)| < \frac{c_2}{|z|^n}$ per i z di modulo abbastanza piccolo; applicando questo a g e usando la sua definizione si ha $\frac{c_1}{|z|^n} < |f\left(\frac{1}{z}\right)| < \frac{c_2}{|z|^n}$ per tutti i z abbastanza piccoli, ovvero $c_1|z|^n < |f(z)| < c_2|z|^n$ per tutti i z di modulo abbastanza grande; questo, per l'esercizio 4 del tutorato scorso, implica che f è un polinomio di grado n.

2. Calcolare $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z^2 - 1}\mathrm{d}z$.

    Soluzione: $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{(}2)\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$, e quindi

$$\oint_\gamma \frac{\sin(z)}{z^2-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\oint_\gamma \frac{\sin(z)}{z-1}\mathrm{d}z - \oint_\gamma \frac{\sin(z)}{z+1}\mathrm{d}z\right) = \frac{\sin(1) - \sin(-1)}{2} = \sin(1)$$

3. Dimostrare che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i$ e dedurne che

$$\int_0^\pi e^{a\cos\theta} \cos(a \sin\theta) \mathrm{d}\theta = \pi$$

<u>*Soluzione*</u>: Dalla formula di Cauchy applicata a $f(z) = e^{az}$ segue immediatamente che l'integrale è uguale a $2\pi i e^{a \cdot 0} = 2\pi i$. Parametrizziamo ora la curva $\{|z| = 1\}$ attraverso $z(t) = \cos(t) + i\sin(t)$, per $t \in (-\pi, \pi)$: si ha

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} \mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{a\cos(t) + ia\sin(t)}}{\cos(t) + i\sin(t)} (-\sin(t) + i\cos(t)) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{a\cos(t)+ia\sin(t)}}{(\cos(t) + i\sin(t))(\cos(t) - i\sin(t))(-i)} (\sin(t) - i\cos(t))^2 \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} i \frac{e^{a\cos(t)+ia\sin(t)}}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} (\sin^2(t) + \cos^2(t) - 2i\cos(t)\sin(t)) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} i[e^{a\cos(t)}(\cos(a\sin(t)) + i\sin(a\sin(t)))(1 - 2i\cos(t)\sin(t))] \mathrm{d}t$$

la cui parte immaginaria è

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{a\cos(t)}(\cos(a\sin(t)) - 2\cos(t)\sin(t)\sin(\sin(t))) \mathrm{d}t$$

che è quindi uguale a 2π. Ora $e^{a\cos(t)}\cos(a\sin(t))$ è pari, quindi il suo integrale su $(-\pi, \pi)$ è il doppio di quello su $(0, \pi)$, mentre $\cos(t)\sin(t)\sin(a\sin(t))$ è la derivata di $\frac{1}{a^2}(\sin(a\sin t) - a\sin t\cos(a\sin t))$, e quindi il suo integrale tra $-\pi$ e π è 0, e si ha la tesi.

4. Sia $P \in \mathbb{C}[z]$ tale che $P(z) \neq 0$ se $z \in \{x + iy | ax + by + c > 0\} =: D$ per alcune costanti $a, b \in \mathbb{R}$, e sia γ una curva chiusa in D. Calcolare $\oint_\gamma \frac{1}{P'(z)} \mathrm{d}z$.

   <u>*Soluzione*</u>: Per il teorema di Lucas, P' è non nullo su D, quindi $\frac{1}{P'(z)}$ è olomorfa su D. È possibile trovere un rettangolo R in D contenente γ. Per il teorema di Goursat si conclude che l'integrale è nullo.

5. Sia f olomorfa nella regione Ω, tale che $|f(z) - 1| < 1$ se $z \in \Omega$. Sia $\gamma \subseteq \Omega$ una qualunque curva chiusa. Calcolare $\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$.

   <u>*Soluzione*</u>: Definiamo un ramo analitico di Log in $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z | \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}$. f ha, per ipotesi, immagine in $B_1(1) \subseteq \Omega$, dunque $\frac{f'}{f}$ ha su Ω una primitiva analitica, coiè $\mathrm{Log}(f(z))$. segue che l'integrale è nullo.

6. Sia $z \in \mathbb{C}$ e sia H_z l'insieme delle funzioni olomorfe e non nulle in un intorno bucato $B_r(z) \setminus \{z\}$ per qualche $r > 0$ e che in z siano olomorfe oppure abbiano un polo.

a) Dimostrare che $(H_z, \cdot)$ è un gruppo.

b) Sia $\psi : H_z \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione tale che:

- se $f(z) = 0$, $\psi(f)$ è l'ordine dello zero in z;
- se f ha un polo in z, $-\psi(f)$ è l'ordine del polo in z;
- se $f(z) \notin \{0, \infty\}$, $\psi(f) = 0$.

Verificare che ψ è un omomorfismo suriettivo di gruppi.

c) $(H_z \cup \{0\}, +, \cdot)$ è un campo?

<u>*Soluzione*</u>:

a) Basta dimostrare che il prodotto e gli inversi di elementi di H_z sono in H_z; per il prodotto è ovvio, mentre per gli inversi basta osservare che $\frac{1}{f(w)}$ è definita nell'intorno bucato (poiché $f(w)$ non è mai zero lì) e se f ha un polo in z $\frac{1}{f}$ ha uno zero e viceversa.

b) Bisogna dimostrare che $\psi(fg) = \psi(f) + \psi(g)$; osserviamo che $\psi(f)$ è definita come l'unico intero tale che $f(w) = (w-z)^{\psi(f)} f_1(w)$ con $f_1(z) \notin \{0, \infty\}$, e quindi $fg(w) = (w-z)^{\psi(f)} f_1(w)(w-z)^{\psi(g)} g_1(w) = (w-z)^{\psi(f)+\psi(g)} f_1(z) g_1(z) = (w-z)^{\psi(f)+\psi(g)}(fg)_1$ con $(fg)_1(z) = f_1(z)g_1(z) \notin \{0\, \infty\}$.

c) No, perché la somma di due funzioni senza zeri in $B_r(z) \setminus \{z\}$ può avervi zeri, e quindi non essere in H_z.

7. Dimostrare che, se f è olomorfa con un polo di ordine n in w, la sua derivata f' ha un polo di ordine $n+1$ in w.

   <u>*Soluzione*</u>: $\frac{1}{f}$ ha uno zero di ordine n in w, e $\left(\frac{1}{f}\right)'$ ne ha quindi uno di ordine $n-1$; ma $\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = \frac{f'(z)}{f^2(z)}$ e quindi $f'(z) = \left(\frac{1}{f}\right)'(z) f^2(z)$ e applicando l'eserzio precedente $\psi(f') = \psi\left(\frac{1}{f}\right) + 2\psi(f) = n - 1 + 2(-n) = -n-1$, ovvero f' ha un polo di ordine $n+1$ in w.

8. (Solo per chi è interessato o chi ha fatto o sta facendo GE5/GE310) Mostrare che non è possibile definire una mappa continua $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ tale che $\exp \circ f = \mathrm{id}$. È invece possibile definire una mappa continua $f : \mathbb{C}^* \to S^1$ con la stessa proprietà?

   <u>*Soluzione*</u>: Poichè exp è un rivestimento di $\mathbb{C}^*$, f sarebbe un sollevamento a $\mathbb{C}$ di id, e quindi, se $f(x_0) = y_0$, $\mathbb{Z} \cong \mathrm{id}_*(\pi_1(\mathbb{C}^*, x_0)) \subseteq \exp_*(\pi_1(\mathbb{C}, y_0)) \cong \{[c_{y_0}]\}$, che è assurdo. Con S^1 al posto di $\mathbb{C}$ è possibile perchè $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Quindi se $x_0 \in \mathbb{C}^*$ e $\exp(y_0) = \mathrm{id}(x_0)$, la condizione $\mathrm{id}_*(\pi_1(\mathbb{C}^*, x_0)) \subseteq \exp_*(\pi_1(\mathbb{S}^1, y_0))$ è soddisfatta ed essendo $\mathbb{C}^*$ connesso, esiste un unico sollevamento di f a S^1 che ha la proprietà voluta.