**Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica**

# Tutorato di AC310 (ex AC1)

**A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. L. Caporaso**

**Tutori: Luca Schaffler e Dario Spirito**

TUTORATO 7

17 NOVEMBRE 2010

1. Determinare e classificare le singolarità isolate e gli zeri[1] (incluso, eventualmente, il punto all'infinito) delle seguenti funzioni:

a) $z(z-1)\sin(\pi z)$

b) $e^z + \dfrac{1}{z}$

c) $\dfrac{e^z - 1}{z^2}$

d) $\sin e^z$

e) $\dfrac{z}{\sin(z)}$

f) $\tan(z)$

g) $\dfrac{1}{(z-1)(z-\pi)}$

h) $\sin\left(\dfrac{z}{z+1}\right)$

i) $\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$

j) $z\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$

Soluzione:

a) $\sin(\pi z)$ ha zeri di ordine 1 in tutti gli interi, mentre $z(z-1)$ ha zeri di ordine 1 in 0 e 1; quindi $z(z-1)\sin(\pi z)$ ha zeri di ordine 2 in 0 e 1 e di ordine 1 negli altri interi (in quanto l'ordine dello zero di un prodotto è uguale alla somma degli ordini degli zeri nei fattori). Per verificarne il comportamento all'infinito, troviamo due successioni che tendono ad infinito in cui la funzione ha limiti diversi; come prima successione possiamo prendere $z_n = n$ (in cui la funzione è sempre 0) mentre come seconda scegliamo $w_n = 2n + \frac{1}{2}$, in modo che $\sin(\pi w_n) = 1$ e $f(w_n) = w_n(w_n - 1) \to \infty$.

b) Su $\mathbb{C}$, l'unico punto che dà problemi è 0; poiché $z\left(e^z + \dfrac{1}{z}\right) = ze^z + 1 \to^{z\to 0} 1$, la funzione vi ha un polo di ordine 1. All'infinito $\frac{1}{z} \to 0$; quindi la funzione si comporta come l'esponenziale, ovvero ha una singolarità essenziale. (*Oppure*: prendendo $z_n = n$ si ha $f(z_n) \to \infty$, mentre con $w_n = 2\pi i n$ si ha $f(w_n) = 0 + \frac{1}{w_n} \to 0$.)

c) Come prima, l'unico punto su $\mathbb{C}$ in cui la funzione ha problemi è 0; espandendo in serie di Taylor il numeratore si ha

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1 + z + \frac{1}{2}z^2 + o(z^2) - 1}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + o(1)$$

e quindi $z\frac{e^z-1}{z^2} = 1 + o(z) \to^{z\to 0} 1$, ovvero $zf(z)$ è olomora in un intorno di 0, e $f$ avrà un polo di ordine 1 in 0. (Osserviamo che la comparsa del termine $\frac{1}{z}$

[1] Non calcolare gli zeri del punto b

nello "sviluppo di Taylor" della funzione corrisponde alla presenza di un polo semplice, così come la presenza di un termine (di grado massimo) $\frac{1}{z^k}$ nella parte singolare di $f$ corrisponde alla presenza di un polo di ordine $k$.) Gli zeri di $f$ si trovano ponendo $e^z = 1$, ovveero corrispondono ai punti $z_n = 2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$.

All'infinito la funzione avrà una singolarità essenziale: basta considerare le due successioni $z_n = 2\pi i n$ e $z_n = n$.

d) Come nei casi precedenti, infinito è una singolarità essenziale (basta scegliere successioni su cui $e^z$ è costante in due punti $z, z' \in [0, 2\pi)$). In $\mathbb{C}$ non ha poli e possiede zeri in quegli $z \in \mathbb{C}$ tali che $e^z = k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Se $w$ è uno zero di $\sin e^z$, questo è semplice perché:

$$(\sin e^z)'|_{z=w} = e^w \cos e^w \neq 0$$

in quanto $e^w \neq 0$ e $e^w = k\pi$ per qualche intero $k$, e $k\pi$ non annulla il coseno.

e) $\frac{z}{\sin(z)}$ ha una singolarità eliminabile in 0 (perché $\frac{\sin(z)}{z}$ tende a 1 per $z \to 0$), e poli negli interi positivi; questi sono semplici perché i corrispondenti zeri di $\sin(z)$ sono di ordine 1. Ad infinito non si ha una singolarità isolata, perché la funzione non è olomorfa in un intorno di $\infty$.

$$\frac{z}{\sin(z)}$$

f) Poniamo $f(z) := \tan z$. Se $k \in \mathbb{Z}$, $\cos \pi(2k+1) = -1$ e $\cos \pi(2k) = 1$, quindi laddove il seno si annulla, il coseno assume un valore finito. Poi $\cos z$ non ha poli in $\mathbb{C}$, dunque gli zeri di $f$ in $\mathbb{C}$ sono gli $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, e questi hanno ordine 1. Il coseno si annulla in $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e in questi punti il seno vale $-1$ o 1. Poiché $\sin z$ non ha poli su $\mathbb{C}$, i poli nel piano complesso sono $\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, che hanno ordine 1. L'infinito non è una singolarità isolata (perché esistono infiniti poli).

g) 1 e $\pi$ sono poli semplici della funzione: infatti $(z-1)\frac{1}{(z-1)(z-\pi)} = \frac{1}{z-\pi} \to^{z \to 1} \frac{1}{1-\pi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $(z-\pi)\frac{1}{(z-1)(z-\pi)} = \frac{1}{z-1} \to^{z\to\pi} \frac{1}{\pi-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

h) Le singolarità derivano da quelle del seno: la funzione ha zeri dove $\frac{z}{z+1}$ è un intero: poiché $\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1}$, questo è un intero se e solo se $\frac{1}{z+1} = n \in \mathbb{Z} \iff z + 1 = \frac{1}{n} \iff z = \frac{1}{n} - 1$ per qualche $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. All'infinito, $\frac{z}{z+1} \to 0$, quindi la funzione ha un ulteriore zero in $\infty$.

L'unico altro punto che dà problemi è $-1$: qui $\frac{z}{z+1}$ ha un polo (ovvero "vale $\infty$"), e quindi (avendo il seno una singolarità essenziale in infinito) ci aspettiamo che la singolarità sia essenziale. Si ha

$$\sin\left(\frac{z}{z+1}\right) = \sin\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = \sin(1-w)$$

dove $w = \frac{1}{z+1}$; $\sin(1-w)$ ha una singolarità essenziale all'infinito, e quindi così sarà la singolarità di $\sin\left(\frac{z}{z+1}\right)$, perché le trasformazioni lineari fratte non cambiano la natura delle singolarità essenziali.

$$\sin\left(\frac{z}{z+1}\right)$$

i) Il comportamento di $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ in $w$ corrisponde al comportamento di $g(z) = \exp(z)$ in $\frac{1}{w}$; quindi $f$ avrà una sola singolarità, in 0, che è essenziale perché l'infinito è una singolarità essenziale dell'esponenziale.

j) Studiare la funzione in $w$ è equivalente a studiare $\frac{\sin(z)}{z}$ in $\frac{1}{w}$; questa ha zeri (di ordine 1) negli interi diversi da 0, una singolarità eliminabile in 0 e una essenziale in infinito; quindi $z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ avrà zeri negli $\frac{1}{n}$, per ogni $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, una singolairtà eliminabile all'infinito e una essenziale in 0.

2. Dimostrare che, se $\Omega$ è connesso, l'insieme delle funzioni olomorfe su $\Omega$ è un dominio d'integrità; dare un controesempio nel caso in cui $\Omega$ sia sconnesso.

   *Soluzione*: Supponiamo che $fg = 0$, ovvero $f(z)g(z) = 0$ per ogni $z \in \Omega$; allora in ogni punto si ha $f(z) = 0$ o $g(z) = 0$, e quindi almeno una tra $f$ e $g$ ha una quantità non numerabile di zeri, e quindi questi hanno un punto di accumulazione; per la connessione di $\Omega$, quella funzione sarà costantemente 0, ovvero $H(\Omega)$ è un dominio d'integrità.

   Per costruire un controesempio basta scegliere una regione costituita da due componenti connesse $\Omega_1$ e $\Omega_2$, e definire $f$ come una funzione costante (e diversa da 0) su $\Omega_1$ e costantemente 0 su $\Omega_2$, e $g$ allo stesso modo m scambiando $\Omega_1$ e $\Omega_2$.

3. Sia $f$ una funzione intera tale che, in ogni espansione $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n(z-w)^n$, almeno uno dei $c_n$ è 0. Dimostrare che $f$ è un polinomio.

   *Soluzione*: Dire che, nell'espansione in serie di Taylor in $w$, $c_n = 0$ equivale a dire che $f^{(n)}(w) = 0$ (ovvero l'$n$-esima derivata è uguale a 0). Sia $A_n := \{z \in \mathbb{C} | f^{(n)}(z) = 0\}$; per ipotesi, ogni $z \in \mathbb{C}$ è in un $A_n$, e quindi $\displaystyle\bigcup_{n\geq 0} A_n = \mathbb{C}$. Se nessuna derivata fosse identicamente nulla (ovvero se $f$ non fosse un polinomio), ogni $A_n$ sarebbe di cardinalità numerabile (gli zeri di una funzione olomorfa non costantemente nulla in $\overline{B_R(0)}$ devono essere finiti – altrimenti avrebbero un punto di accumulazione – e quindi gli zeri in $\mathbb{C}$, essendo l'unione degli zeri in $\overline{B_n(0)} \setminus \overline{B_{n-1}(0)}$, devono essere numerabili); ma l'unione di una quantità numerabile di insiemi numerabili è ancora numerabile, mentre $\mathbb{C}$ non lo è. Quindi $f$ deve essere un polinomio.

4. Diremo che una funzione è meromorfa su una regione $\Omega \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ se in ogni punto di $\Omega$ è olomorfa oppure ha un polo; indichiamo con $m(\Omega)$ l'insieme delle funzioni meromorfe su $\Omega$.

   a) Mostrare che se $f \in m(\widehat{\mathbb{C}})$, allora ha al più un numero finito di poli.

   b) Dedurne che una funzione meromorfa sulla sfera di Riemann assume ogni valore solo in un numero finito di punti.

c) $m(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$

d) Dare un esempio di funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ ma non razionale.

<u>*Soluzione*</u>:

a) Se per assurdo $f$ avesse infiniti poli, questi si accumulerebbero (essendo $\widehat{\mathbb{C}}$ compatto); questo non può avvenire né in un punto di $\mathbb{C}$ (in cui ci sarebbe una singolarità non isolata) né all'infinito (perché in tal caso $f\left(\frac{1}{z}\right)$, che è ancora meromorfa, avrebbe una singolarità non isolata in 0).

b) Basta far vedere che $f$ è nulla al più su un numero finito di punti, ma ciò è ovvio dopo quanto detto perché $\frac{1}{f} \in m(\widehat{\mathbb{C}})$.

c) Se $f$ non ha poli, per il tutorato precedente, è una costante. Supponiamo che abbia almeno un polo. A meno di trasformazioni lineari fratte, che trasformano funzioni razionali in funzioni razionali, possiamo supporre che $\infty$ non sia un polo per $f$. Per il punto a, f ha un numero finito di poli, diciamo $z_1, \ldots, z_m$ con molteplicità $n_1, \ldots, n_m > 0$. La funzione $g(z) = f(z)(z-z_1)^{n_1} \ldots (z-z_m)^{n_m}$ è olomorfa su tutta la sfera di Riemann, quindi è costante. In conclusione $f$ è una funzione razionale.

d) Basta prendere una qualsiasi funzione intera diversa da un polinomio, ad esempio $f(z) = e^z$.

5. Dimostrare se può esistere o meno una funzione $f$, olomorfa in un intorno di 0, che soddisfi $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ una delle seguenti:

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \exp(-n)$,

b) $|f\left(\frac{1}{n}\right)| < \exp(-n)$,

c) $2^{-n} < |f\left(\frac{1}{n}\right)| < 2^{1-n}$.

<u>*Soluzione*</u>:

a) Se $f$ esistesse, avrebbe uno zero in 0, allora $f(z) = z^k h(z)$ con $h$ olomorfa in 0 e $h(0) \neq 0$. Ma $f(\frac{1}{n}) = \frac{h(\frac{1}{n})}{n^k}$, cioè $0 \leftarrow n^k e^{-n} = h(\frac{1}{n}) \to h(0) \neq 0$ per $n \to \infty$.

b) Si ragiona analogamente al precedente.

c) Se $f$ esistesse, avrebbe uno zero in 0, allora al solito $f(z) = z^k h(z)$, allora $f(\frac{1}{n}) = \frac{h(\frac{1}{n})}{n^k}$, quindi:

$$n^k 2^{-n} < \left| h(\frac{1}{n}) \right| < n^k 2^{1-n}$$

e quindi $h$ avrebbe uno zero in 0 facendo il limite per $n \to \infty$.