Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. L. Caporaso

Tutori: Luca Schaffler e Dario Spirito

Tutorato 8
24 ottobre 2010

1. Dimostrare che una funzione intera non costante assume almeno un valore reale.

   Soluzione: *Primo metodo.* Distinguiamo due casi, a seconda del tipo di singolarità di f all'infinito: se f ha un polo allora è un polinomio, e quindi ha almeno uno zero; altrimenti ha una singolarità essenziale, e per il teorema di Weierestrass l'immagine $f(\mathbb{C})$ è densa in $\mathbb{C}$. Se fosse $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, allora $f(\mathbb{C})$ sarebbe contenuta in uno dei due semipiani, in quanto $\mathbb{C}$ è connesso e f è, in particolare, una funzione continua. Ma nessun insieme può essere sia denso che contenuto in un semipiano, e quindi f deve assumere valori reali.

   Secondo metodo. Come nel metodo precendente, $f(\mathbb{C})$ deve essere contenuto in un semipiano; sia T una trasformazione lineare fratta che manda l'asse reale nel cerchio unitario e il semipiano in cui è contenuto $f(\mathbb{C})$ al suo interno. Allora $T \circ f$ è una funzione intera limitata, e quindi deve essere costante; ma questo implica che anche f è costante (poiché T è biunivoca tra $B_1(0)$ e il semipiano), contro l'ipotesi.

2. Determinare se i seguenti insiemi sono semplicemente connessi:

   a) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$
   b) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
   c) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$
   d) $\{z \in \mathbb{C} | 1 \leq |z| \leq 2\}$
   e) $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$
   f) $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$

   Soluzione:

   a) Il complementare di $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ sulla sfera di Riemann è $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ che è connesso, quindi l'insieme è semplicemente connesso; oppure si può notare che $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ è uno stellato dal punto 0.
   b) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ non è connesso, quindi non può essere semplicemente connesso.
   c) L'indice di 0 rispetto alla curva $\sqrt{2}S^1 = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = \sqrt{2}\}$ è 1, quindi $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ non è semplicemente connesso.
   d) L'indice di una circonferenza centrata nell'origine rispetto a 0 è 1, quindi l'insieme non è semplicemente connesso.
   e) $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ non è connesso in quanto è unione dei due aperti $\{z \in \mathbb{C} | \ \mathrm{Re}(z) < \sqrt{2}\}$ e $\{z \in \mathbb{C} | \ \mathrm{Re}(z) > \sqrt{2}\}$, e quindi non è semplicemente connesso.
   f) $\mathbb{R} + i\mathbb{R} = \mathbb{C}$ è semplicemente connesso.

3. Dimostrare che l'unione di due regioni convesse non disgiunte è semplicemente connessa.

Soluzione: Esiste un punto z nell'intersezione; per la convessità delle due regioni ognuna è stellata rispetto a z, e quindi la loro unione è stellata rispetto a z. Di conseguenza l'unione è contraibile, e quindi semplicemente connessa.

4. Sia Ω una regione e sia $z \notin \Omega$. Dimostrare che se $\Omega \cup \{z\}$ è aperto allora Ω non è semplicemente connesso.

   Soluzione: Dire che $\Omega \cup \{z\}$ è aperto vuol dire che Ω ha un "buco" in z. Formalmente, se $\Omega \cup \{z\}$ è aperto, esiste un R tale che $\overline{B_R(0)} \subseteq \Omega$; il suo bordo γ (ovvero l'insieme $\{w \in \mathbb{C} |\ |z-w| = R\}$), orientato in senso antiorario, ha indice 1 rispetto a z (come si può vedere, ad esempio, integrando la funzione $\frac{1}{w-z}$ su γ), e, poiché $z \notin \Omega$, quest'ultimo non può essere semplicemente connesso.

5. Dimostrare che non è possibile mappare conformemente il disco unitario sopra l'insieme $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) > 0\} \cup \{0\}$.

   Soluzione: Per la suriettività esiste un $w \in B_1(0)$ tale che $f(w) = 0$. Ora f è, in particolare, una funzione conforme $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ e quindi è aperta; quindi $f(B_r(w))$ (per ogni r) è un aperto di $\mathbb{C}$ che contiene 0. Ma ogni intorno di 0 in $\mathbb{C}$ comprende punti in tutti i quadranti, e quindi nessuno può essere contenuto in $\{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) > 0\} \cup \{0\}$, contro l'ipotesi che f abbia valori in esso.

6. È valido un "principio del minimo" analogo al principio del massimo? (Ovvero: è vero che il modulo di una funzione olomorfa non assume minimo su una regione?) Se no, quali sono le ipotesi minimali per cui vale?

   Soluzione: Non è valido a causa della possibile presenza degli zeri: poiché infatti il modulo di un numero complesso è in $[0, +\infty)$, qualunque punto in cui la funzione valga 0 è un minimo per il suo valore assoluto.

   Rimuovendo questo caso, ovvero assumendo che f non abbia zeri in Ω, il "principio del minimo" è vero: basta infatti applicare il principio del massimo a $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, che è olomorfa in Ω grazie all'assenza di zeri di f; se $|f|$ avesse un minimo allora $\frac{1}{|f|} = |g|$ avrebbe un massimo.

7. a) Verificare che le trasformazioni lineari fratte $\phi_\alpha(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$, con $|\alpha| < 1$, sono automorfismi del disco unitario.
   b) Dimostrare che ogni automorfismo del disco unitario è una trasformazione lineare fratta.
   c) È vero che qualsiasi mappa biiettiva e olomorfa tra due dischi aperti è ancora una trasformazione lineare fratta?

   Soluzione:

   a) Sia $z = e^{it}$ un punto di S^1. Allora

$$|\phi_\alpha(e^{it})| = \left| \frac{e^{it}-\alpha}{1-\overline{\alpha}e^{it}} \right| = \left| \frac{e^{it}-\alpha}{e^{it}(e^{-it}-\overline{\alpha})} \right| = \left| \frac{e^{it}-\alpha}{e^{it}(\overline{e^{it}}-\overline{\alpha})} \right| =$$

$$= \left| \frac{e^{it} - \alpha}{e^{it}(\overline{e^{it} - \alpha})} \right| = |e^{-it}| \left| \frac{e^{it} - \alpha}{\overline{e^{it} - \alpha}} \right| = 1$$

e quindi la circonferenza unitaria viene mandata nella circonferenza unitaria. Inoltre $\phi_\alpha(0) = -\alpha \in B_1(0)$ (ovvero l'interno della circonferenza rimane all'interno, e l'esterno rimane all'esterno) e la funzione è olomorfa su $B_1(0)$ perché il polo è in $\frac{1}{\overline{\alpha}} \notin B_1(0)$. È facile inoltre verificare che $\phi_\alpha \circ \phi_{-\alpha}$ è l'identità del disco, e quindi ϕ_α è un automorfismo.

b) Sia f un automorfismo del disco unitario, e sia $\alpha := f(0)$. Allora $f_1 := \phi_\alpha \circ f$ è ancora un automorfismo del disco, ed è tale che $f_1(0) = \phi_\alpha(\alpha) = 0$; sia g la sua inversa. Applicando il lemma di Schwartz a f_1 si ottiene $|f_1(z)| \leq |z| = |g(f_1(z))|$; ma anche $g(0) = 0$, e quindi si deve avere, per ogni w, $|g(w)| \leq |w|$, ovvero $|g(f_1(z))| \leq |f_1(z)|$, e quindi $|f_1(z)| = |z|$; sempre per il lemma di Schwartz, f_1 deve essere una rotazione, ovvero $f_1(z) = \lambda z$ per un $\lambda \in S^1$; in particolare f_1 è una TLF. Quindi anche $f = \phi_\alpha^{-1} \circ f_1 = \phi_{-\alpha} \circ f_1$ è una TLF.

c) Sia $f : B_{r_1}(z_1) \longrightarrow B_{r_2}(z_2)$ una funzione olomorfa e biiettiva. Siano $T : B_{r_2}(z_2) \longrightarrow B_1(0)$ tale che $T(z) = \frac{z-z_2}{r_2}$, e $S : B_{r_1}(z_1) \longrightarrow B_1(0)$ tale che $S(z) = \frac{z-z_1}{r_1}$; allora $T \circ f \circ S^{-1}$ è un automorfismo del disco unitario, e quindi (per il punto b) è una trasformazione lineare fratta g. Dunque anche $f = T^{-1} \circ g \circ S$ è una TLF.

8. Sia f una funzione olomorfa in $B_R(0)$ tale che $f(z_0) = w_0$, con $z_0 \in B_R(0)$, $f(B_R(0)) \subseteq B_M(0)$. Dimostrare che

$$\left| \frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - \overline{w_0} f(z)} \right| \leq \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z_0} z} \right|$$

<u>*Soluzione*</u>: L'obiettivo è ridursi alle ipotesi standard del lemma di Schwartz componendo con opportune trasformazioni lineari fratte. Ricapitolando le ipotesi, abbiamo $f : B_R(0) \to B_M(0)$ olomorfa tale che $f(z_0) = w_0$. Possiamo costruire le seguenti trasformazioni lineari fratte (daremo dopo la costruzione esplicita):

$$T : B_1(0) \to B_R(0) \text{ t.c. } 0 \mapsto z_0$$

e

$$S : B_M(0) \to B_1(0) \text{ t.c. } w_0 \mapsto 0$$

Definiamo $g := S \circ f \circ T : B_1(0) \to B_1(0)$ t.c. $0 \mapsto 0$. g è anche analitica, dunque valgono tutte le ipotesi del lemma di Schwartz e si ha che per $z \in B_1(0)$, $|g(z)| \leq |z|$. Calcoliamo T e S e traduciamo la tesi in termini di f. Possiamo determinare un opportuno automorfismo di $B_1(0)$ che mandi 0 in $\frac{z_0}{R}$. Dall'esercizio precedente sappiamo che questo è:

$$T_1(z) = \frac{z - a}{-\overline{a} z + 1} \text{ dove } a = -\frac{z_0}{R}$$

quindi:

$$T(z) := RT_1(z) = R\frac{Rz + z_0}{\overline{z_0}z + R}$$

è la trasformazione cercata. Per determinare S, determiniamo $S^{-1} : B_1(0) \to B_M(0)$ t.c. $0 \mapsto w_0$ analogamente a quanto fatto per trovare T. Allora:

$$S^{-1}(z) = M\frac{Mz + w_0}{\overline{w_0}z + M}$$

e invertendo si trova:

$$S(z) = M\frac{z - w_0}{M^2 - z\overline{w_0}}$$

Ora se $z = T(\zeta)$, si ha che:

$$|g(\zeta)| \leq |\zeta| \Rightarrow |S \circ f(z)| \leq |T^{-1}(z)|$$

Ricavando T^{-1}:

$$T^{-1}(z) = R\frac{z - z_0}{R^2 - z\overline{z_0}}$$

e quindi si ha quanto voluto:

$$\left| M\frac{f(z) - w_0}{M^2 - f(z)\overline{w_0}} \right| \leq \left| R\frac{z - z_0}{R^2 - z\overline{z_0}} \right|.$$