Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310 (ex AC1)

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. L. Caporaso

Tutori: Luca Schaffler e Dario Spirito

Tutorato 9
1 dicembre 2010

1. Calcolare il residuo in 0 (se non altrimenti indicato) delle seguenti funzioni:

a) e^z

b) $\dfrac{1}{z}$

c) $\dfrac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$, in 0 e in $i\frac{\pi}{2}$

d) $\dfrac{\cos(z^2)}{z^5}$

e) $\dfrac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$

f) $\dfrac{1}{z^n} - 1$, $n \in \mathbb{N}$, in $z = 1$

g) $\dfrac{e^{z^2} - z\cos(z)}{z^4}$

h) $\dfrac{P(z)}{z^n}$, $P \in \mathbb{C}[X]$, $n \in \mathbb{N}$

i) $\dfrac{\sin(z)\log(z)}{(z-1)^3}$ in $z = 1$, con $\log(z)$ definito in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

Soluzione: Nel caso di poli, a volte faremo uso della formula:

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f(z)) = \lim_{z \to z_0} \frac{h^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}$$

dove z_0 è il polo da f, n è il suo ordine e $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^n}$ con h olomorfa in z_0 e $h(z_0) \neq 0$.

a) La funzione è olomorfa in zero, quindi ha residuo nullo.

b) Si può applicare direttamente la definizione essendo il caso estremamente semplificato:

$$\mathrm{Res}_0\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = n(\partial B_1(0), 0) = 1$$

c) In zero la funzione è olomorfa, quindi non ha residuo (ovvero ha residuo nullo). In $i\frac{\pi}{2}$ ha un polo semplice, dunque per la formula data all'inizio:

$$\mathrm{Res}_{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sinh z}{\cosh z}\right) = \lim_{z \to i\frac{\pi}{2}} \left(z - i\frac{\pi}{2}\right)\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} =$$

$$= \lim_{w \to 0} w\frac{e^w + e^{-w}}{e^w - e^{-w}} = 2\lim_{w \to 0} \frac{w}{e^w - e^{-w}} = 2\lim_{w \to 0}\frac{w}{2w + o(w)} = 1$$

d) Sviluppando in serie di Taylor il coseno:

$$\frac{\cos z^2}{z^5} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{z^{4k-5}}{(2k)!} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2z} + \text{termini di ordine superiore.}$$

Applicando ora la definizione di residuo, l'unico termine che sopravvive è quello corrispondente a $\frac{1}{z}$, dunque il residuo è $-\frac{1}{2}$.

e) Se $n = 1$,è il punto b. Se $n \neq 1$, possiede una primitiva analitica, quindi il residuo è zero.

f) $z = 1$ è un polo semplice, quindi

$$\text{Res}_1 f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z^n - 1} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1} = \frac{1}{n}$$

g) Sviluppando in serie di Taylor

$$\text{Res}_0 \frac{e^{z^2} - z\cos(z)}{z^4} = \text{Res}_0 \left(\frac{1 + z^2 + \frac{1}{2}z^4 + o(z^4)}{z^4} + \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + o(z^3)}{z^3} \right) =$$

$$\text{Res}_0 \left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{2z^2} + o(1) + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + o(z) \right)$$

e l'unico termine di grado -1 (ovvero che contiene $\frac{1}{(}z)$) è $\frac{1}{2z}$, e il residuo è $-\frac{1}{2}$.

h) Applicando la definizione di residuo si ha

$$\text{Res}_0 \frac{P(z)}{z^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{P(z)}{z^n} \mathrm{d}z$$

che per la formula di Cauchy è uguale a $\frac{P^{n-1}(z)}{(n-1)!} = a_{n-1}$ dove a_{n-1} è il termine di grado $n-1$ di P. Alternativamente è possibile considerare P come la propria serie di Taylor e considerare il termine di grado -1.

i)

$$\text{Res}_1 \frac{\sin(z)\log(z)}{(z-1)^3} = \text{Res}_0 \frac{\sin(w+1)\log(w+1)}{w^3} =$$

$$\text{Res}_0 \frac{\sin(w)\cos(1)\log(w+1)}{w^3} + \text{Res}_0 \frac{\cos(w)\sin(1)\log(w+1)}{w^3}$$

In un intorno di 0 possiamo definire $\log(w+1)$ (equivale a definire $\log(z)$ in un intorno di 1), e la sua serie di Taylor è $\log(w+1) = w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 + o(w^3)$; sviluppando anche seno e coseno si ha

$$\text{Res}_0 \frac{\sin(w)\cos(1)\log(w+1)}{w^3} = \cos(1)\text{Res}_0 \frac{\left(w - \frac{1}{6}w^3 + o(w^4)\right)\left(w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 + o(w^3)\right)}{w^3} =$$

$$\cos(1)\mathrm{Res}_0 \frac{w^2+o(w^3)}{w^3} = \cos(1)\mathrm{Res}_0 \frac{1}{w} = \cos(1)$$

e

$$\mathrm{Res}_0 \frac{\cos(w)\sin(1)\log(w+1)}{w^3} = \sin(1)\mathrm{Res}_0 \frac{\left(1-\frac{1}{2}w^2+o(w^3)\right)\left(w-\frac{1}{2}w^2+\frac{1}{3}w^3+o(w^3)\right)}{w^3} =$$

$$\sin(1)\mathrm{Res}_0 \frac{w-\frac{1}{2}w^2+\frac{1}{3}w^3-\frac{1}{2}w^3+o(w^3)}{w^3} = \sin(1)\mathrm{Res}_0\left(\frac{1}{w^2}-\frac{1}{2w}\right) = -\frac{\sin(1)}{2}$$

e quindi il residuo è $\cos(1)-\frac{\sin(1)}{2}$.

2. Trovare il numero di zeri delle seguenti funzioni nella regione indicata:

   a) $z^4-4z^3+z^2+z$ in $B_1(0)$
   b) z^4-3z^3-1 in $B_2(0)$
   c) z^4-6z+3 in $B_2(0)\setminus B_1(0)$
   d) $4z^4-29z^2+25$ in $B_3(0)\setminus B_2(0)$
   e) $z^6-6z^3+z^2-1$ in $B_2(0)\setminus B_1(0)$

   Soluzione:

   a) Sia $\gamma := \partial B_1(0)$, $\Omega := B_2(0)$, $f(z) := -4z^3$, $g(z) := z^4-4z^3+z^2+z$. Valgono tutte le ipotesi del teorema di Rouché, infatti f e g sono olomorfe su Ω, $\gamma \sim 0 \bmod \Omega$, $\forall z \in \Omega\setminus\gamma,\ n(\gamma,z) = 0$ o 1 e infine su γ vale che:

   $$|f(z)-g(z)| = |z^4+z^2+z| \le 3 < 4 = |-4z^3| = |f(z)|$$

   quindi f e g hanno in $B_1(0)$ lo stesso numero di zeri, e poiché f ne ha tre (precisamente uno di ordine tre), anche g avrà in $B_1(0)$ tre zeri.

   b) $\gamma := \partial B_2(0)$, $f(z) := z^4$, $g(z) := z^4-3z-1$ e se $z\in\gamma$, allora si ha che:

   $$|f(z)-g(z)| = |-3z-1| \le 7 < 16 = |z^4| = |f(z)|$$

   dunque g in $B_2(0)$ ha quattro zeri.

   c) Per trovare gli zeri nella corona, basta trovare gli zeri in $B_2(0)$ e poi sottrarvi quelli in $B_1(0)$. Troviamo prima gli zeri in $B_2(0)$. Se $f(z) = z^4$ e $g(z) = z^4-6z+3$, allora sul bordo di $B_2(0)$ si ha che:

   $$|f(z)-g(z)| = |-6z+3| \le 15 < 16 = |z^4| = |f(z)|$$

   quindi g ha quattro zeri in $B_2(0)$. In $B_1(0)$ osserviamo che g ha uno zero perché se $f(z) := -6z$, sul bordo di $B_1(0)$ vale che:

   $$|f(z)-g(z)| = |z^4+3| \le 4 < 6 = |-6z| = |f(z)|$$

   Quindi g nella corona ha tre zeri.

d) Sia $g(z) := 4z^4 - 29z^2 + 25$. Se $f(z) := 4z^4$, lungo $\partial B_3(0)$ si ha che:

$$|f(z) - g(z)| = |-29z^2 + 25| \leq 286 < 324 = |4z^4| = |f(z)|$$

quindi g ha in $B_3(0)$ quattro zeri. Su $\partial B_2(0)$, se $f(z) := -29z^2$, allora:

$$|f(z) - g(z)| = |4z^4 + 25| \leq 89 < 116 = |-29z^2| = |f(z)|$$

dunque, g ha due zeri in $B_2(0)$. Concludiamo che nella corona g ha due zeri.

e) $g(z) := z^6 - 6z^3 + z^2 - 1$. Su $\partial B_2(0)$, prendiamo $f(z) := z^6$. Su $\partial B_1(0)$ invece prendiamo $f(z) := -6z^3$. La conclusione è che g ha in $B_2(0) \setminus B_1(0)$ tre zeri.

3. Per quali valori di k la funzione $f(z) = z^k + \sin(z)$ ammette k zeri in $B_R(0)$?

<u>*Soluzione*</u>: Una funzione che ha k zeri in $B_R(0)$ (per ogni R) è z^k; l'obiettivo è quindi applicare il teorema di Rouché con $g = z^k$, ovvero è necessario stimare $|\sin(z)|$. Sviluppando in serie

$$|\sin(z)| = \left|\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$$

Per avere $|f - g| < |g|$ su $B_R(0)$, è sufficiente quindi avere $e^R < R^k$, ovvero $e^R < e^{k \log R}$ (dove log è il logaritmo reale) $\Longrightarrow R < k \log R \Longrightarrow k > \frac{R}{\log(R)}$.

4. Dimostrare che se la successione di funzioni $\{f_n\}$ converge uniformemente sui compatti di Ω a f (non costantemente nulla) e ogni f_n ha al più m zeri in Ω allora anche f ha al più m zeri in Ω.

<u>*Soluzione*</u>: Supponiamo che f abbia più di m zeri, e consideriamone $m+1$: siano $z_1, \dots, z_{m+1}$. Per ogni i sia γ_i una circonferenza centrata in z_i che non racchiuda altri zeri di f e che non intersechi altre γ_j (basta prendere un raggio $< \frac{1}{2} \min_{f(z)=0, z\neq z_i} |z - z_i|$, che è positivo perché gli zeri di f non possono accumularsi, essendo f non nulla). Osserviamo che, per ogni i, γ_i può contenere zeri solo di un numero finito di f_n: se infatti esistessero $w_1, \dots, w_r, \dots$ in γ_i tali che $f_{n_j}(w_j) = 0$ per qualche n_j, allora i w_i avrebbero un punto di accumulazione w in γ_i (che è compatto) e quindi, poiché $\{f_n\}$ converge uniformemente sui compatti di Ω, $f(w) = 0$, contro la costruzione dei γ_i. Possiamo quindi scartare gli f_n che hanno zeri su un qualunque γ_j (che sono in numero finito) ottenendo ancora una successione (sia $\{g_n\}$) che converge uniformememte sui compatti di Ω a f.

Sia ora $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{m+1}$, e consideriamo $\alpha_n := \int_\gamma \frac{g_n'(z)}{g_n(z)} \mathrm{d}z$, $\alpha := \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z$. Poiché le g_n non hanno zeri su γ, $\frac{g_n'(z)}{g_n(z)}$ converge uniformemente su γ a $\frac{f'(z)}{f(z)}$, e quindi $\alpha_n \to \alpha$. Tuttavia $\alpha = 2\pi i(m+1)$ (per il principio dell'argomento), mentre $|\alpha_n| \leq |2\pi i m| = 2\pi m$ perché ogni g_n ha al più m zeri, e questo è assurdo; di conseguenza f può avere al più m zeri.

5. (*Principio dell'argomento "pesato"*) Sia Ω una regione e f olomorfa su Ω a meno di poli $b_1, \dots, b_m$ e con zeri in $a_1, \dots, a_n$, dove gli zeri e i poli non sono necessariamente tutti distinti, ma sono ripetuti ognuno con la propria molteplicità. Siano γ un ciclo omologo a zero in Ω che non passa né per gli zeri né per i poli e g olomorfa su Ω. Mostrare che:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}g(z)dz = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, a_k)g(a_k) - \sum_{k=0}^{m} n(\gamma, b_k)g(b_k)$$

<u>*Soluzione*</u>: Mimiamo la dimostrazione del principio dell'argomento. Consideriamo prima gli zeri di f. $f(z) = (z-a_1)f_1(z)$, allora:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}g(z) = \left(\frac{f_1(z) + (z-a_1)f_1'(z)}{(z-a_1)f_1(z)}\right)g(z) = \left(\frac{1}{z-a_1} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right)g(z)$$

che, iterando, è pari a:

$$\left(\frac{1}{z-a_1} + \ldots + \frac{1}{z-a_n} + \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\right)g(z)$$

dove f_n non ha più zeri su Ω. Trattando ora i poli di f_n, si ha che $f_n(z) = \frac{f_{n+1}(z)}{(z-b_1)}$, allora:

$$\frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = \frac{f_{n+1}'(z)(z-b_1) - f_{n+1}(z)}{(z-b_1)f_{n+1}(z)} = \frac{f_{n+1}'(z)}{f_{n+1}(z)} - \frac{1}{z-b_1}$$

che iterando diventa:

$$\frac{f_{n+m}'(z)}{f_{n+m}(z)} - \frac{1}{z-b_1} - \ldots - \frac{1}{z-b_m}$$

dunque

$$\frac{f'(z)}{f(z)}g(z) = \left(\frac{1}{z-a_1} + \ldots + \frac{1}{z-a_n} + \frac{f_{n+m}'(z)}{f_{n+m}(z)} - \frac{1}{z-b_1} - \ldots - \frac{1}{z-b_m}\right)g(z)$$

Ora, integrando sul cammino:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(z)}{z-a_k}\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(z)}{z-b_k}\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f_{n+m}'(z)}{f_{n+m}(z)}\mathrm{d}z$$

ma per la formula di Cauchy per i cicli omologhi a zero:

$$\oint_\gamma \frac{f_{n+m}'(z)}{f_{n+m}(z)}\mathrm{d}z = 0$$

e $\forall\, c \in \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(z)}{z-c}\mathrm{d}z = n(\gamma, c)g(c)$$

da cui quanto voluto.

6. (*Teorema dei residui sulla sfera di Riemann*) Si definisca $\mathrm{Res}_\infty f(z) := \mathrm{Res}_0\left(-\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})\right)$. Se $f \in m(\widehat{\mathbb{C}})$, mostrare che:
$$\sum_{a\in\widehat{\mathbb{C}}} \mathrm{Res}_a f(z) = 0$$

<u>*Soluzione*</u>: Per quanto visto nei tutorati precedenti, $f \in \mathbb{C}(z)$, allora f avrà in $\widehat{\mathbb{C}}$ una quantità finita di poli. Esiste dunque un R sufficientemente grande t.c. tutti i poli in $\mathbb{C}$ siano contenuti in $B_R(0)$. Posto $\Gamma := \partial B_R(0)$, applichiamo il teorema dei residui:
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{a \text{ polo di } f \text{ in } \mathbb{C}} \mathrm{Res}_a(f(z))$$
Ma sappiamo che se f è olomorfa in in un punto, lì ha residuo nullo, quindi:
$$\sum_{a\in\mathbb{C}} \mathrm{Res}_a(f(z)) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)\mathrm{d}z$$
Ora consideriamo il cambio di variabile $z = \frac{1}{w}$, e se $\gamma := \partial B_{\frac{1}{R}}(0)$:
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^-} -\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right)\mathrm{d}w =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^+} -\frac{1}{w^2}f(\frac{1}{w})\mathrm{d}w = -\mathrm{Res}_\infty(f(z))$$
Abbiamo quindi ottenuto che:
$$\sum_{a\in\widehat{\mathbb{C}}} \mathrm{Res}_a(f(z)) = 0.$$

Osserviamo che l'unico punto incui abbiamo usato l'ipotesi$f \in m(\hat{\mathbb{C}})$ è nello stabilire che f ha solo un numero finito di poli; il risultato continua a valere se si suppone che f è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ eccettuati al più un numero finito di singolarità (poli o essenziali).

7. Determinare la funzione razionale che ha per coefficienti di Taylor la successione di Fibonacci F_n, dati da $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ per $n \geq 2$.

<u>*Soluzione*</u>: Sia $f(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n$ la funzione cercata, e consideriamo $f_1(z) = zf(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ e $f_2(z) = z^2 f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$. È chiaro che i coefficienti della serie di Taylor di f_1 e f_2 non sono altro che quelli di f, solo spostati, rispettivamente, di uno o due posti; quindi si ha $b_0 = 1$, $b_n = F_{n-1}$ per $n \geq 1$, e analogamente $c_0 = c_1 = 0$, $c_n = F_{n-2}$ per $n \geq 2$. Per $n \geq 2$, allora, $b_n + c_n = F_{n-1} + F_{n-2} = F_n$; negli altri casi si ha invece $b_1 + c_1 = b_1 = F_0 = F_1$ e $b_0 + c_0 = 0$. Di conseguenza $f_1 + f_2$ è la funzione i cui coefficienti di Taylor sono F_n per $n \geq 1$ e 0 per $n = 0$, e dunque $f_1(z) + f_2(z) + 1 = f(z)$.

Ma allora $f(z) = 1 + zf(z) + z^2 f(z) \Longrightarrow f(z) = \dfrac{1}{1 - z - z^2}$.