GE110 - Geometria 1

Prova in Itinere 1
15 Aprile 2010

COGNOME e NOME :

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 1. Sia W il sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dato da tutte le soluzioni dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
1(a). Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio dato da tutte le soluzioni dell'equazione

$$x_1 + x_2 - 3x_4 = 0.$$

Si determini $U \cap W$, e se ne scriva una base.

1(b). Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro e sia U_a il sottospazio dato da tutte le soluzioni dell'equazione

$$x_1 + x_2 + ax_4 = 0.$$

Si dimostri che la dimensione di $W \cap U_a$ non dipende da a.

Problema 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $m \geq 3$ su un campo K. Siano $U_1, U_2, \ldots, U_m$ sottospazi vettoriali di V, con $U_i \neq U_j$ per ogni $i \neq j$.

- Vero o Falso (motivare le risposte)

(1) $\dim\Big(U_1 + U_2 + \ldots + U_m\Big) \geq 1$.

(2) $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_m \neq \emptyset$.

(3) Se $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_m = \{0\}$ allora $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$.

(4) Se $U_i \cap U_j = \{0\}$ per ogni $i \neq j$ allora $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$.

Problema 3. Sia K un campo e sia $V = K^2$. Si consideri il seguente sottinsieme di V:

$$X = \{(a, b) \in K^2, \quad \text{tali che } a^2 + b^2 = 0\}.$$

Nei casi elencati qua sotto, si dica se X è un sottospazio vettoriale di V, e in caso affermativo, se ne calcoli la dimensione.

(1) $K = \mathbb{R}$.

(2) $K = \mathbb{C}$.

(3) $K = \mathbb{F}_2$ (il campo con due elementi).

Problema 4. Sia $n \geq 2$ e K un campo fissato di caratteristica 0. Si consideri il K-spazio vettoriale $M_n(K)$ delle matrici quadrate di ordine n ad entrate in K. Per ciascuno dei sottinsiemi definiti sotto, Y, Z, S, X, si dica se è o meno un sottospazio vettoriale e, in caso affermativo, se ne determini la dimensione e un supplementare.

(1) $Y := \{A \in M_n(K) : A \text{ è invertibile}\}$.

(2) $Z := \{A \in M_n(K) : A \text{ non è invertibile}\}$.

(3) $S := \{A \in M_n(K) : A = {}^tA\}$.

(4) $X := \{A = (a_{i,j}) \in M_n(K) : \sum_{i=1}^n a_{i,i} = 0\}$ (ovvero, X è l'insieme delle matrici i cui elementi sulla diagonale hanno somma uguale a zero).