Problema 1. Sia W il sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dato da tutte le soluzioni dell'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

1(a). Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio dato da tutte le soluzioni dell'equazione

$$x_1 + x_2 - 3x_4 = 0.$$

Si determini $U \cap W$, e se ne scriva una base.

Per definizione, $U \cap W$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

dei coefficienti del sistema ha rango 2, perché le sue due righe sono non proporzionali. Pertanto, in virtù del Teorema di Rouché–Capelli (omogeneo), si ha $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 4-2 = 2$. Risolviamo il sistema pensando x_1, x_2 parametri e otteniamo immediatamente

$$x_3 = -x_1 - x_2 \qquad x_4 = \frac{x_1 + x_2}{3}.$$

Pertanto si ha

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \\ \dfrac{x_1 + x_2}{3} \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}},$$

e dunque $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $U \cap W$ (i 2 generatori sono non proporzionali e quindi linearmente indipendenti).

1(b). Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro e sia U_a il sottospazio dato da tutte le soluzioni dell'equazione

$$x_1 + x_2 + ax_4 = 0.$$

Si dimostri che la dimensione di $W \cap U_a$ non dipende da a.

Lo spazio vettoriale $W \cap U_a$ è costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_4 = 0 \end{cases},$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Poiché la sottomatrice $A(1,2|2,3) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ di A è invertibile (per ogni $a \in \mathbb{R}$), segue che il rango di A è 2, per ogni $a \in \mathbb{R}$. Dunque, ancora per il Teorema di Rouché–Capelli omogeneo, si ha $\dim_{\mathbb{R}}(W \cap U_a) = 2$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione $n \geq 3$. Siano $W_1, W_2, \ldots, W_n$ sottospazi vettoriali di V, con $W_i \neq W_j$ per ogni $i \neq j$.

• Vero o Falso (motivare le risposte)

1. $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n \neq \emptyset$.
   Vero, perché il vettore nullo $\mathbf{0} \in W_i$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.

2. $\dim\Big(W_1 + W_2 + \ldots + W_n\Big) \geq 1$.
   Vero. Infatti la famiglia di sottospazi $\{W_1, \ldots, W_n\}$ è costituita da almeno 3 sottospazi distinti ($n \geq 3$), e quindi uno di essi sarà non nullo. Dunque la somma $W_1 + \ldots + W_n$ contiene un vettore non nullo, e ciò è chiaramente equivalente alla disuguaglianza $\dim_{\mathbb{R}}(W_1 + \ldots + W_n) \geq 1$.

3. Se $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n = \{0\}$ allora $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$.
   Falso. Per esempio, sia $V := \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W_i :=< \mathbf{x}_i >_{\mathbb{R}}$, per $i \in \{1, 2, 3\}$. Allora è immediatamente visto che $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}$, ma la somma dei sottospazi W_1, W_2, W_3 non è diretta. Infatti $\mathbf{x}_3 \in W_1 + W_2 + W_3$ ha due espressioni distinte come somma di elementi degli spazi W_i ($i = 1, 2, 3$), precisamente

   $$\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{0},$$

   (si osservi inoltre che $W_1 + W_2 + W_3 =< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 >_{\mathbb{R}}$, che è manifestamente distinto da $\mathbb{R}^3$, avendo dimensione 2).

4. Se $W_i \cap W_j = \{0\}$ per ogni $i \neq j$ allora $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$.

   Falso. Basta usare lo stesso controesempio dato nel punto 2, e osservare che $W_i \cap W_j = \{\mathbf{0}\}$, per ogni $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Problema 3. Sia K un campo e sia $V = K^2$. Si consideri il seguente sottinsieme di V:

$$X = \{(a,b) \in K^2, \quad \text{tali che } a^2 + b^2 = 0\}.$$

Si dica se X è un sottospazio vettoriale di V, e in caso affermativo, se ne calcoli la dimensione, nei seguenti casi.

1. $K = \mathbb{R}$.
   Sia $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Essendo $a, b \in \mathbb{R}$, abbiamo $a^2 + b^2 = 0$ se, e soltanto se $a = b = 0$. Dunque $X = \{\mathbf{0}\}$ é uno spazio vettoriale e $\dim_{\mathbb{R}}(X) = 0$.

2. $K = \mathbb{C}$.
   X non è un $\mathbb{C}-$sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^2$. Infatti abbiamo che $\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \in X$, $\mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \in X$, ma $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin X$.

3. $K = \mathbb{F}_2$ (il campo con due elementi).
   Sia $\alpha \in \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Allora, ovviamente $\alpha^2 = \alpha$. Segue immediatamente che, se $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^2$, allora $a^2 + b^2 = 0$ se, e soltanto se, $a + b = 0$, e quindi X è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $a + b = 0$. Dunque, poiché la matrice dei coefficienti dell'equazione lineare $a+b = 0$ ha manifestamente rango 1, dal Teorema di Rouché–Capelli omogeneo segue che $\dim_{\mathbb{F}_2}(X) = 1$.

   Si può anche procedere in modo diretto, visto che il campo ha solo due elementi. Si verifica immediatamente che

   $$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 1 = 0.$$

   Dunque $X = \{(0,0); (1,1)\} =< (1,1) >$, dunque X che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{F}_2^2$ generato da un solo elemento, e pertianto ha dimensione 1.

Problema 4. Sia $n \geq 2$ e K un campo fissato di caratteristica 0. Si consideri il K-spazio vettoriale $M_n(K)$ delle matrici quadrate di ordine n ad entrate in K. Per ciascuno dei sottinsiemi definiti sotto, Y, Z, S, X, si dica se è o meno un sottospazio vettoriale e, in caso affermativo, se ne determini la dimensione e un supplementare.

1. $Y := \{A \in M_n(K) : A \text{ è invertibile}\}$.
   Y non è un $K-$sottospazio vettoriale di $M_n(K)$. Infatti la matrice nulla non è invertibile.

2. $Z := \{A \in M_n(K) : A \text{ non è invertibile}\}$.
   Sia $n = 2$, $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dal fatto che $\det(A) = \det(B) = 0$, deduciamo che $A, B \in Z$, ma $A + B \notin Z$, poiché $\det(A + B) = 1$. Dunque la somma fra matrici non è una operazione su Z. Ciò prova che Z non è un $K-$sottospazio di $M_2(K)$.

3. $S := \{A \in M_n(K) : A = {}^tA\}$.
Siano $A, B \in S$ e $k \in K$. Allora, dalle proprietà delle matrici segue

$$^t(A - B) = {}^tA - {}^tA = A - B \qquad {}^t(kA) = k^tA = kA$$

e dunque $A - B, kA \in S$. Ciò prova che S è un $K-$sottospazio vettoriale di $M_n(K)$. Determiniamone una base. Fissiamo $h \in \{1, \ldots, n\}$. Per ogni $k \in \{h, \ldots, n\}$ sia U_{hk} la matrice le cui entrate di posto $(h, k), (k, h)$ sono 1, mentre tutte le altre entrate sono 0 (in particolare, U_{hk} è simmetrica). Sia $A := (a_{ij})$ una matrice simmetrica. Allora è facilmente visto che A si esprime, IN MODO UNICO, come combinazione lineare di matrici dell'insieme

$$\mathcal{B} := \{U_{hk} : h \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{h, \ldots, n\}\},$$

precisamente si ha

$$A = \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{k=h}^{n} a_{hk} U_{hk} \right).$$

Questo mostra che $\mathcal{B}$ è una base di S. Scriviamo esplicitamente gli elementi di $\mathcal{B}$.

$$U_{11}, \ldots, U_{1n}, U_{22}, \ldots, U_{2n}, \ldots, U_{n-1n-1}, U_{n-1n}, U_{nn}.$$

Dunque le matrici di $\mathcal{B}$ sono $n + n - 1 + \ldots + 2 + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Resta provato che $\dim_K(S) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Dimostriamo che un supplementare di S in $M_n(K)$ è lo spazio delle matrici antisimmetriche a entrate in K. Sia $A \in M_n(K)$. Se A è simultaneamente simmetrica e antisimmetrica, allora ${}^tA = A = -A$. Dunque $2A = 0$. Siccome K ha caratteristica 0 (e quindi $\neq 2$), 2 è un invertibile in K e pertanto $A = 0$. Dunque l'intersezione fra lo spazio delle matrici simmetriche e lo spazio delle matrici antisimmetriche è banale (perché la caratteristica di K è distinta da 2!!!!!!). Per concludere, basta verificare che ogni matrice quadrata a entrate in K è somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica. Sia $A \in M_n(K)$. Si ha che $A_1 := 2^{-1}(A + {}^tA)$ è simmetrica e $A_2 := 2^{-1}(A - {}^tA)$ è antisimmetrica (ha senso definire A_1, A_2, ancora perché K ha caratteristica distinta da 2), e inoltre $A = A_1 + A_2$.

4. $X := \{A = (a_{i,j}) \in M_n(K) : \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0\}$ (ovvero, X è l'insieme delle matrici i cui elementi sulla diagonale hanno somma uguale a zero).
Dalle proprietà della somma fra matrici e del prodotto fra uno scalare e una matrice, segue che X è un $K-$sottospazio vettoriale di $M_n(K)$. Inoltre, si osservi che X è l'insieme delle matrici le cui componenti, rispetto alla base canonica di $M_n(K)$, soddisfano l'equazione lineare omogenea $X_{11} + \ldots + X_{nn} = 0$ nelle n^2 indeterminate X_{ij} $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$. Poiché la matrice dei coefficienti di tale equazione ha, ovviamente, rango 1, dal Teorema di Rouchè–Capelli omogeneo segue che $\dim_K(X) = n^2 - 1$. Verifichiamo che un supplementare di X in $M_n(K)$ è lo spazio generato da una qualsiasi matrice che non appartiene a X (per esempio la matrice avente 1 al posto $(1, 1)$ e 0 altrove). Sia $A \in M_n(K) - X$, e sia $\mathcal{B}$ una fissata base di X. Dal fatto che $X = < \mathcal{B} >_K$, segue $A \notin < \mathcal{B} >_K$, e dunque, per quanto dimostrato a lezione, l'insieme $\mathcal{B} \cup \{A\}$ è linearmente indipendente e ha $(n^2 - 1) + 1 = n^2 = \dim_K(M_n(K))$ elementi. Dunque l'insieme linearmente indipendente $\mathcal{B}$ viene completato alla base $\mathcal{B} \cup \{A\}$ di $M_n(K)$, ed equivalentemente $< A >_K$ è un supplementare di X in K.