GE110 - Geometria 1

Prova in Itinere 2
27 Maggio 2010

COGNOME e NOME :

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 1. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^5_{\mathbb{R}}$ si fissi il riferimento affine canonico, e siano (x, y, z, w, u) le coordinate del generico punto di $\mathbb{A}^5_{\mathbb{R}}$ rispetto a tale riferimento. Si considerino i punti A di coordinate $(1, -1, 0, 0, 2)$ e B di coordinate $(0, 0, 0, 0, 1)$. Si consideri anche il sottospazio affine $\mathcal{S}$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z - w = 1. \end{cases}$$

(a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta $\mathcal{R}$ passante per A e B.
(b) Si determini la dimensione di $\mathcal{S}$ e si dica se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ sono paralleli.
(c) Si determini, se esiste, un iperpiano $\mathcal{I}$ contenente $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.
(d) Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione 5. Si caratterizzino le coppie $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ tali che

$$< \mathcal{R}, \mathcal{S} >= \mathbb{A},$$

dove $\mathcal{R} \subset \mathbb{A}$ è una retta e $\mathcal{S} \subset \mathbb{A}$ è un sottospazio affine di dimensione 3.
Suggerimento: si rifletta sulle parti precedenti.

SOLUZIONE. (a) Per definizione, la giacitura della retta $\mathcal{R}$ è $Y :=< \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0, 0, -1) >_{\mathbb{R}}$. Dunque si ha

$$\mathcal{R} = B+ < \overrightarrow{AB} >_{\mathbb{R}}= \{(-t, t, 0, 0, 1 - t) : t \in \mathbb{R}\}$$

In altri termini, $\mathcal{R}$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \\ w = 0 \\ u = 1 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (\star)$$

Troviamo le equazioni cartesiane di $\mathcal{R}$, "eliminando" t dalle equazioni parametriche. Per il Teorema di Rouché–Capelli, basterà determinare 4 equazioni linearmente indipendenti che vengano soddisfatte dalle coordinate di tutti i punti di $\mathcal{R}$. Sommando le prime 2 equazioni di $(\star)$, si ottiene $x + y = 0$, mentre sommando la seconda e la quinta equazione di $(\star)$ si ottiene $y + u = 1$. Dunque le coordinate dei punti di $\mathcal{R}$ soddisfano il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \\ y + u = 1 \end{cases} \qquad (\star')$$

Poiché, come è immediatamente visto, la matrice dei coefficienti del precedente sistema ha rango 4, segue che soluzioni di $(\star')$ sono ESATTAMENTE le coordinate dei punti di $\mathcal{R}$.

(b) Si verifica immediatamente che la matrice dei coefficienti e la matrice completa del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z - w = 1. \end{cases}$$

che definisce $\mathcal{S}$ hanno rango 2, e pertanto, per il Teorema di Rouché–Capelli, si ha $\dim(\mathcal{S}) = 3$. Inoltre le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ verificano le equazioni della giacitura

$$Z := \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 : x + y = z - w = 0\}$$

di $\mathcal{S}$. Ciò basta per dedurre $Y \subseteq Z$, e pertanto $\mathcal{R}$ e parallela a $\mathcal{S}$.

(c) L'iperpiano $\mathcal{I}$, di cui vogliamo mostrare l'esistenza, dovrà contenere, in particolare, $\mathcal{S}$, e quindi va cercato nel fascio di iperpiani di asse $\mathcal{S}$. Dunque, se $\mathcal{I}$ esiste, ha equazione cartesiana

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(z - w - 1) = 0 \qquad (\triangle)$$

con λ, μ opportuni numeri reali non simultaneamente nulli. Siccome, inoltre, vogliamo che $\mathcal{I}$ contenga $\mathcal{R}$, possiamo determinare λ, μ richiedendo che le coordinate dei punti $(-t, t, 0, 0, 1 - t)$ soddisfino $(\triangle)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Otteniamo immediatamente

$$\lambda(-t + t - 1) + \mu(-1) = -\lambda - \mu = 0 \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

Dunque l'iperpiano $\mathcal{I}$ cercato esiste, è unico, si trova per $\lambda = 1, \mu = -1$ e ha equazione cartesiana $x + y - z + w = 0$.

(d) Siano Y, Z le giaciture di $\mathcal{R}, \mathcal{S}$, rispettivamente. Supponiamo che $< \mathcal{R}, \mathcal{S} >= \mathbb{A}$. Allora, evidentemente, deve essere $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$. Infatti, altrimenti, per l'identità di Grassman affine si avrebbe

$$\dim(< \mathcal{R}, \mathcal{S} >) = \dim(\mathbb{A}) = \dim(\mathcal{R}) + \dim(\mathcal{S}) - \dim(\mathcal{R} \cap S) \leq 1 + 3 = 4,$$

una contraddizione. Poiché $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$, ancora per l'identità di Grassmann affine si ha $5 = \dim(< \mathcal{R}, \mathcal{S} >) = \dim(Y + Z) + 1$, ovvero $\dim(Y + Z) = 4$. L'ultima uguaglianza vale se e soltanto se $Y \cap Z = \{\mathbf{0}\}$, stante la formula di Grassmann vettoriale. Dunque segue che, se $< \mathcal{R}, \mathcal{S} >= \mathbb{A}$, allora $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ non si incontrano e $Y \cap Z = \{\mathbf{0}\}$. Ripetendo i precedenti passaggi a ritroso, osserviamo che le condizioni precedenti sono anche sufficienti. In conclusione

$$< \mathcal{R}, \mathcal{S} >= \mathbb{A} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset \quad \text{e} \quad Y \cap Z = \{\mathbf{0}\}$$

Poiché $\dim(Y) = 1$, segue che $Y \cap Z = \{\mathbf{0}\}$ se e soltanto se $Y \not\subseteq Z$. Dunque possiamo anche concludere dicendo che $< \mathcal{R}, \mathcal{S} >= \mathbb{A}$ se e soltanto se $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ sono sghembi.

Problema 2. Sia $n \geq 2$ un numero intero e sia V lo spazio dei polinomi di grado al più n in una indeterminata x a coefficienti in un campo K di caratteristica 0; ossia $V := \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \ \ \forall a_i \in K, \ \ i = 0, \dots, n\}$. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica su K^n, e sia $e_0 \in K^n$ un vettore fissato qualsiasi.

(a) Si spieghi perché esiste un'unica trasformazione lineare $F : V \longrightarrow K^n$ che soddisfa la seguente condizione:

$$F(x^i) = ie_i, \qquad \forall i = 0, \dots, n.$$

(b) Sia

$$B := \{x^{i-1} + x^i, \quad \forall i = 1, \dots, n\} \cup \{x^n\} = \{1 + x, x + x^2, \dots, x^{n-1} + x^n, x^n\}.$$

Si dimostri che B è una base per V. Si scriva la matrice di F rispetto alla base B e alla base canonica per K^n.

(c) Si calcolino il nucleo e l'immagine di F e si dica chiaramente se F è iniettiva e se è suriettiva.

SOLUZIONE. (a) Osserviamo che $\mathcal{A} := \{1, x, \dots, x^n\}$ è una base dello spazio vettoriale V. Quindi, per il cosiddetto Teorema di Estensione, la funzione $\mathcal{A} \longrightarrow K^n$, $x^i \mapsto i\mathbf{e}_i$ $(i = 0, \dots, n)$, si estende univocamente a un'applicazione lineare $V \longrightarrow K^n$, e tale estensione è la funzione F cercata.

(b) Siccome B ha $n+1$ elementi, per far vedere che è una base di V basterà verificare che B è linearmente indipendente, ovvero che la matrice A sulle cui colonne ci sono le coordinate dei vettori di B rispetto alla base $\mathcal{A}$ ha rango $n+1$. Tale matrice ha termine generale a_{ij} tale che $a_{i+1\,i} = 1$, per $i = 1, \dots, n$, $a_{n+1\,n+1} = 1$, $a_{ij} = 0$, altrimenti. Dunque A è una matrice triangolare i cui termini della diagonale principale sono 1. Segue che A è invertibile (e quindi ha rango massimo). Poiché F è lineare, si ha immediatamente

$$F(x^{i-1} + x^i) = (i-1)\mathbf{e}_{i-1} + i\mathbf{e}_i, \qquad i = 1, \dots n,$$

e quindi la matrice M di F rispetto a B e alla base canonica di K^n ha termine generale b_{ij} $(i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots n+1\})$ tale che

$$b_{i,j} = \begin{cases} i & \text{se } j = i \text{ e se } j = i+1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ovvero:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n-2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n-1 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & n & n \end{pmatrix}$$

(c) La sottomatrice di M ottenuta considerando le prime n righe e le prime n colonne è triangolare e ha elementi non nulli sulla diagonale pricipale, poiché K ha caratteristica 0. Quindi $\dim_K(F(V)) = n$ e quindi $\dim(\mathrm{Ker}(F)) = 1$. In particolare, F è surgettiva.

Inoltre, da quanto appena visto e dalla definizione di F segue $\mathrm{Ker}(F) =< 1 >_K$. Dunque F non è iniettiva.

Problema 3. Si considerino matrici quadrate a coefficienti in un campo K.
(a) Si dia la definizione di matrici *simili.*
(b) Vero o Falso: Se A è invertibile e B è simile ad A, anche B è invertibile.
Motivare la risposta.
(c) Vero o Falso: Se A e B sono simili, allora le loro trasposte, ${}^tA$ e ${}^tB$, sono simili.

SOLUZIONE. (a) "Dovrebbe" essere ben noto.

(b) VERO: sia A invertibile e B simile ad A. Dunque, esiste una matrice invertibile P tale che $B = P^{-1}AP$. Dunque B è invertibile in quanto prodotto di matrici invertibili.

(c) VERO: Siano A e B matrici simili, e sia P una matrice invertibile tale che $B = P^{-1}AP$. Dunque ${}^tB = {}^tP^tA^t(P^{-1}) = {}^tB = {}^tP^tA^t({}^tP)^{-1}$, dove abbiamo usato il fatto che ${}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}$. Questa identità si dimostra nel modo seguente

$$ {}^tP \cdot {}^t(P^{-1}) = {}^t(P^{-1} \cdot P) = {}^tI_n = I_n $$

e quindi ${}^t(P^{-1})$ è l'inversa di ${}^tP$. Ciò dimostra che ${}^tA, {}^tB$ sono matrici simili.