GE110 - Geometria 1

Esame Scritto B
16 Luglio 2010

COGNOME e NOME :

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 1. Si consideri il sottoinsieme $\mathcal{S} := \left\{ \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}, \mathbf{w} := \begin{pmatrix} i+1 \\ i-1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{C}^2$.

(i) Dopo aver esibito una base $\mathcal{B}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{R}$, si determinino le componenti di $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Sia $\mathbf{v} := \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ il generico vettore dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{R}$. Allora è immediatamente visto che

$$\mathbf{v} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

Ciò mostra che $\mathbf{v}$ si esprime, evidentemente in modo unico, come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$. Equivalentemente, $\mathcal{B} := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{R}$. Segue immediatamente che le componenti dei vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono rispettivamente $(1, -1, 1, 1)$ e $(1, 1, -1, 1)$.

(ii) Si stabilisca se $\mathcal{S}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente del $K-$spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$, nei casi $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.

Si ha $\mathbf{w} = i\mathbf{v}$. Dunque $\mathcal{S}$ è un sottoinsieme linearmente dipendente di $\mathbb{C}^2$, pensato come $\mathbb{C}-$spazio vettoriale.
Muniamo adesso $\mathbb{C}^2$ della sua naturale struttura di $\mathbb{R}-$spazio vettoriale. Per quanto visto in (i), la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

sulle cui righe ci sono le componenti dei vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ rispetto a $\mathcal{B}$, ha manifestamente rango 2 (le righe sono non proporzionali!!!). Dunque $\mathcal{S}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{C}^2$, pensato come $\mathbb{R}-$spazio vettoriale.

(iii) Si dimostri che esiste un unico endomorfismo $\phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{R}$ con le seguenti tre proprietà:
(a) -1 è autovalore di ϕ con molteplicità geometrica 2;
(b) $\phi(\mathbb{C}^2) =< \mathcal{S} >_{\mathbb{R}}$;
(c) $\mathrm{Ker}(\phi) =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$.

Ci chiediamo, innanzitutto, quali sono altre condizioni che ϕ deve soddisfare, SE esso esiste (DOPO mostreremo che in effetti esiste). Se ϕ esiste, sia Y l'autospazio di ϕ relativo all'autovalore -1 e sia $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base di Y. Segue immediatamente che $\phi(\mathbf{u}_i) = -\mathbf{u}_i \in \phi(\mathbb{C}^2) =< \mathcal{S} >_{\mathbb{R}}$, per $i = 1, 2$. In particolare Y è sottoinsieme di $< \mathcal{S} >_{\mathbb{R}}$, e quindi $Y =< \mathcal{S} >_{\mathbb{R}}$, avendo tali spazi vettoriali la stessa dimensione ed essendo essi comparabili. Dunque segue che, se ϕ esiste, $\phi(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}, \phi(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}$. Adesso proviamo esistenza e unicità di ϕ. Osserviamo che la matrice delle componenti dei vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e ha rango massimo, come si vede senza difficoltà calcolando il determinante. Dunque resta provato che $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è una base di $\mathbb{C}^2$. Pertanto, dal ben noto Teorema di Estensione, segue che esiste un'unica applicazione lineare $\phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ tale che

$$\phi(\mathbf{v}_3) = \phi(\mathbf{v}_4) = \mathbf{0}, \qquad \phi(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}, \qquad \phi(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}$$

Ovviamente $\phi(\mathbb{C}^2) =< \phi(\mathbf{v}), \phi(\mathbf{w}) >_{\mathbb{R}} =< \mathcal{S} >_{\mathbb{R}}$. Inoltre, dalla definizione e dal Teorema Nullità + Rango segue $\mathrm{Ker}(\phi) =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$. Infine, ancora dalla definizione di ϕ, segue che -1 è autovalore di ϕ con molteplicità geometrica 2.

Problema 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ sia fissato il riferimento affine canonico e siano (x, y, z, w) le coordinate del generico punto di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ rispetto a tale riferimento. Si consideri il piano $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x = w \end{cases}$$

e, per ogni $h \in \mathbb{R}$, sia $\mathcal{R}_h$ la retta di equazioni paramentriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = ht \\ z = (1-h)t \\ w = 1 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Si discuta la posizione relativa di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$; in altri termini, si dica per quali valori di h il piano $\mathcal{P}$ e la retta $\mathcal{R}_h$ sono incidenti, paralleli o sghembi (non incidenti e non paralleli).

Sia $h \in \mathbb{R}$. Allora il generico punto di $\mathcal{R}_h$ è $P_t(1+2t, ht, (1-h)t, 1+2t)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dalla definizione di $\mathcal{P}$, segue che $P_t \in \mathcal{P}$ se, e soltanto se, $1 + 2t - 2ht + (1-h)t = 0$, ovvero $(3 - 3h)t = -1$. Pertanto, per $h \neq 1$, si ottiene che $P_t \in \mathcal{P}$ se, e soltanto se, $t = t^*_h := -(3 - 3h)^{-1}$. Dunque, per ogni $h \neq 1$, l'intersezione $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}_h$ è il punto $P_{t^*_h}$, e $\mathcal{P}, \mathcal{R}_h$ sono incidenti e non parallele. Per $h = 1$, l'equazione $(3 - 3h)t = -1$ è incompatibile, e quindi $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}_1 = \emptyset$. Inoltre, la giacitura di $\mathcal{R}_1$ è $< \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$. Poiché le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto alla base canonica soddisfano le equazioni $x - 2y + z = x - w = 0$ della giacitura di $\mathcal{P}$, resta provato che $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}_1$ sono paralleli.

(ii) Si stabilisca se $\dim(< \mathcal{P}, \mathcal{R}_h >)$ dipende da h.

Se $h \neq 1$ l'intersezione $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}_h$ è un punto. Dunque, dall'identità di Grassmann affine segue $\dim(< \mathcal{P}, \mathcal{R}_h >) = \dim(\mathcal{P}) + \dim(\mathcal{R}_h) - \dim(\mathcal{P} \cap \mathcal{R}_h) = 2 + 1 + 0 = 3$.

Per $h = 1$, dette X, Y le giaciture di $\mathcal{P}, \mathcal{R}_1$, rispettivamente, si ha, ancora per l'identità di Grassmann affine, $\dim(\mathcal{P}, \mathcal{R}_1 >) = \dim_{\mathbb{R}}(X+Y)+1 = \dim_{\mathbb{R}}(X)+1 = 3$. Dunque $\dim(< \mathcal{P}, \mathcal{R}_h >)$ non dipendo da h.

(iii) È vero che, per ogni $h \in \mathbb{R}$, esiste un iperpiano $\mathcal{I}_h$ contenente $\mathcal{P} \cup \mathcal{R}_h$?

L'iperpiano di equazione cartesiana $x = w$ contiene sia $\mathcal{P}$ che $\mathcal{R}_h$, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

(iv) Sia adesso $\mathcal{P}$ un arbitrario piano affine in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, e sia V la sua giacitura. Sia W un supplementare di V in $\mathbb{R}^4$. Detto $\mathcal{S} \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ un qualsiasi sottospazio affine di giacitura W, si dimostri che $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, e si determini $\dim(\mathcal{P} \cap \mathcal{S})$.

CON I SISTEMI LINEARI. Siano $\begin{cases} ax + by + cz + dw = e \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = \epsilon \end{cases}$ le equazioni cartesiane di $\mathcal{P}$. Dunque, le equazioni della giacitura V di $\mathcal{P}$ sono $\begin{cases} ax + by + cz + dw = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0 \end{cases}$
Per l'identità di Grassmann vettoriale, W ha dimensione 2, e quindi avrà 2 equazioni cartesiane, diciamo $\begin{cases} a'x + b'y + c'z + d'w = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0 \end{cases}$ Poiché, per ipotesi, $V \cap W = (\mathbf{0})$, il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + dw = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d'w = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione, quella banale, e quindi la sua matrice dei coefficienti ha determinante non nullo. Inoltre, se $\mathcal{S}$ è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ avente giacitura W, allora $\mathcal{S}$ è un piano e avrà equazioni cartesiane

$$\begin{cases} a'x + b'y + c'z + d'w = e' \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = \epsilon' \end{cases}$$

Dunque un punto appartiene a $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ se e soltanto se le sue coordinate soddisfano il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + dw = e \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = \epsilon \\ a'x + b'y + c'z + d'w = e' \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = \epsilon' \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti ha determinante non nullo, per quanto visto prima. Dunque, per il Teorema di Cramer, $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ è precisamente un punto, ovvero $\dim(\mathcal{P} \cap \mathcal{S}) = 0$.
CON L'ALGEBRA LINEARE. Se fosse $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \emptyset$, dall'identità di Grassmann affine seguirebbe $\dim(< \mathcal{P}, \mathcal{S} >) = \dim(V + W) + 1 = 4 + 1 = 5$, contro il fatto che $< \mathcal{P}, \mathcal{S} > \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$. Inoltre, se $\mathcal{P} \cap \mathcal{A}$ contenesse due punti distinti P, Q, allora $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$ conterrebbe la retta $\mathcal{R}$ passante per P, Q (infatti $\mathcal{R}$ è il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ contenente P, Q). Detto $\mathbf{v}$ un vettore che genera la giacitura di $\mathcal{R}$, allora $\mathbf{v}$ appartiene alla giacitura di $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$, che coincide, come mostrato a lezione, con $V \cap W$, una contraddizione, essendo V, W uno supplementare dell'altro.

Problema 3. Sia X un insieme non vuoto. Un'applicazione $f : X \longrightarrow X$ si dice *involuzione* se $f \circ f = \mathrm{Id}_X$.

(i) Sia $n \geq 2$ un numero intero. Si verifichi che l'applicazione
$$f_n : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}); \qquad A \mapsto -{}^t A$$
è un'applicazione lineare e un'involuzione.

La linearità di f_n segue dalla proprietà di linearità della trasposta di una matrice. Inoltre, per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$, si ha
$$f_n(f_n(A)) = f_n(-{}^t A) = -f_n({}^t A) = -(-{}^t({}^t A)) = A$$
e quindi f_n è un'involuzione.

(ii) Nel caso $n = 2$ si determinino esplicitamente gli autospazi di f_2, e si dica se f_2 è diagonalizzabile.

Sia $\mathcal{E} := \left\{ E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $M_2(\mathbb{R})$. Dalla definizione di f_2 segue immediatamente

$$f_2(E_1) = -E_1 \qquad f_2(E_2) = -E_3 \qquad f_2(E_3) = -E_2 \qquad f_2(E_4) = -E_4$$

e pertanto si ha

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(f_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Segue immediatamente che il polinomio caratteristico di f è

$$\det\left(\begin{pmatrix} -1-T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-T \end{pmatrix}\right) = (1+T)^2(T^2-1) = (1+T)^3(T-1)$$

Dunque gli autovalori di f_2 sono esattamente $1, -1$. Dalla definizione di f_2, segue che gli autospazi di $1, -1$ sono rispettivamente lo spazio delle matrici antisimmetriche e quello delle matrici simmetriche. Poiché la caratteristica di $\mathbb{R}$ è $\neq 2$, segue, da quanto fatto a lezione, che $M_2(\mathbb{R})$ è somma diretta dei degli autospazi di f_2 e quindi f_2 è diagonalizzabile.

(iii) Sia V un $\mathbb{R}-$spazio vettoriale e $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo e un'involuzione, si dimostri che se λ è un autovalore di f, allora $\lambda \in \{-1, 1\}$. (Non è necessario calcolare il polinomio caratteristico di f.)

Sia λ un autovalore di f, e sia $\mathbf{v} \in V - (\mathbf{0})$ un vettore tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Poiché f è simultaneamente un endomorfismo e un'involuzione, si ha

$$\mathbf{v} = f(f(\mathbf{v})) = f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda^2 \mathbf{v}$$

ovvero $(1 - \lambda^2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. La conclusione segue immediatamente dal fatto che $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

(iv) Si usi (iii) per rispondere alla questione (ii) per ogni $n \geq 3$.

Per (iii), gli unici eventuali autovalori di f_n sono $1, -1$. Dalla definizione segue che effettivamente sia 1 che -1 sono autovalori i cui autospazi sono rispettivamente gli insiemi delle matrici antisimmetriche e simmetriche. Dunque $M_n(\mathbb{R})$ è somma diretta degli autospazi di f_n (visto a lezione), ovvero f_n è diagonalizzabile.