GE110 - Geometria 1

Esame Scritto A
11 Giugno 2010

COGNOME e NOME :

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 1. Sia $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ lo spazio affine reale di dimensione n con il sistema di riferimento canonico, le cui cordinate sono denotate $x_1, \ldots, x_n$. Sia t un parametro che varia in $\mathbb{R}$. Si considerino gli iperpiani $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ di equazione cartesiana $(t-i)x_i + x_{i+1} = i$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$, e l'iperpiano S_n di equazione $x_n = n$. Ovvero

$$\begin{aligned}
&S_1: \quad (t-1)x_1 + x_2 = 1,\\
&S_2: \quad (t-2)x_2 + x_3 = 2,\\
&\vdots\\
&S_{n-1}: \quad (t-n+1)x_{n-1} + x_n = n-1,\\
&S_n: \quad x_n = n
\end{aligned}$$

(a) Si determinino i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui $S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \neq \emptyset$ e per tali valori si calcoli $\dim S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n$.

Soluzione. Un punto appartiene all'intersezione $\bigcap_{i=1}^n S_i$ se, e soltanto se, le sue coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ sono soluzioni del seguente sistema lineare con n equazioni e n incognite

$$\begin{cases}
(t-1)x_1 + x_2 = 1,\\
(t-2)x_2 + x_3 = 2,\\
\vdots\\
(t-n+1)x_{n-1} + x_n = n-1,\\
x_n = n
\end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è

$$A := \begin{pmatrix}
t-1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
0 & t-2 & 1 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & t-n+1 & 1\\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Poiché A è una matrice triangolare, il suo determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale, quindi

$$\det A = \prod_{i=1}^{n-1}(t-i).$$

Quindi,

$$\det A = 0 \Leftrightarrow t \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

In virtù del Teorema di Cramer, per ogni $t \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1, \ldots, n-1\}$, il sistema lineare ammette una e una sola soluzione, o, equivalentemente $\dim(S_1 \cap \ldots \cap S_n) = 0$.

Sia $t \in \{1, \ldots, n-1\}$. Ora il rango di A è minore di n. Consideriamo la matrice completa del sistema

$$C := \begin{pmatrix}
t-1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1\\
0 & t-2 & 1 & \ldots & 0 & 2\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & t-n+1 & 1 & n-1\\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & n
\end{pmatrix}$$

Si verifica immediatamente che la sottomatrice quadrata $C(1, 2, \ldots, n|2, \ldots, n)$ di ordine n di C ha determinante n, e quindi il rango di C è n. Da questo segue immediatamente che, per $t \in \{1, \ldots, n-1\}$ il sistema è incompatibile, e quindi $S_1 \cap \ldots \cap S_n = \emptyset$.

(b) Per $n = 2$ si determini esplicitamente l'intersezione $S_1 \cap S_2$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Per (a), $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ se, e soltanto se, $t \neq 1$. Per $t \neq 1$ l'unico punto P di $S_1 \cap S_2$ ha coordinate che sono soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} (t-1)x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Applicando la regola di Cramer, o ricavando direttamente x_1, si ha $P(-(t-1)^{-1}, 2)$.

Problema 2. Sia X un insieme non vuoto. Un'applicazione $f : X \longrightarrow X$ si dice *idempotente* se $f \circ f = f$.

(a) Sia V un $\mathbb{R}-$spazio vettoriale di dimensione 2, e sia $\mathcal{B} := \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ una sua base. Si dimostri che l'endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ tale che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è idempotente. Si dimostri che f è diagonalizzabile e che

$$\mathrm{Ker}(f) \oplus f(V) = V.$$

Soluzione. La matrice di $f \circ f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ (sia al dominio che al codominio) è

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f \circ f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$$

Poiché la mappa

$$\mu_{\mathcal{B},\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}); \qquad \phi \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$$

è un isomorfismo, segue immediatamente $f = f \circ f$. Il polinomio caratteristico di f è

$$\det \begin{pmatrix} 1-T & -1 \\ 0 & -T \end{pmatrix} = -T(1-T)$$

le cui radici sono $0, 1$. Dunque f è diagonalizzabile (il suo polinomio caratteristico si decompone linearmente in $\mathbb{R}[T]$ e non ha radici multiple). Osserviamo adesso che

$$f(V) =< f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) >_{\mathbb{R}} =< \mathbf{v}, -\mathbf{v} >_{\mathbb{R}} =< \mathbf{v} >_{\mathbb{R}} .$$

D'altra parte, poiché $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, segue che $< \mathbf{v} >_{\mathbb{R}}$ è esattamente l'autospazio associato all'autovalore 1 (infatti tale autospazio ha dimensione 1, perché 1 è una radice semplice del polinomio caratteristico). Inoltre, per definizione, $\mathrm{Ker}(f)$ è l'autospazio associato a 0. Dunque, poiché f è diagonalizzabile, V è somma diretta dei suoi autospazi. A questo punto l'unguaglianza $\mathrm{Ker}(f) \oplus f(V) = V$ è evidente.

(b) Siano K un campo, V un $K-$spazio vettoriale di dimensione finita e $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo idempotente. Si dimostri che $f(V)$ è un autospazio di f, che $\mathrm{Ker}(f) \oplus f(V) = V$, e che f è diagonalizzabile.

Soluzione. Se f è l'endomorfismo nullo o se f è l'identità di V, le asserzioni da dimostrare sono ovvie: nel primo caso $\mathrm{Ker}(f) = V$ e $f(V) = (0)$, nel secondo caso si ha $\mathrm{Ker}(f) = (0)$ e $f(V) = V$.

Altrimenti, fissiamo un vettore $\mathbf{w} \in f(V) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Per definizione $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$, per qualche $\mathbf{v} \in V$. Poiché f è idempotente, si ha $f(\mathbf{w}) = f(f(\mathbf{v})) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Dunque, 1 è un autovalore di f e $\mathbf{w}$ è un suo autovettore. Per l'arbitrarietà di $\mathbf{w} \in f(V) - \{\mathbf{0}\}$, segue immediatamente che $f(V)$ è contenuto nell'autospazio di f associato all' autovalore 1. Viceversa, se $\mathbf{v}$ è un autovettore di autovalore 1, allora esso è immagine di se stesso, e quindi $\mathbf{v} \in f(V)$. Dunque $f(V)$ coincide con l'autospazio di f associato all' autovalore 1. Dal fatto che $f(V)$ e $\mathrm{Ker}(f)$ sono autospazi relativi ad autovalori distinti $(1, 0)$, segue che la loro intersezione è banale, ovvero, la loro somma è diretta. Fissiamo $\mathbf{v} \in V$. Ovviamente si ha $\mathbf{v} = \mathbf{v} - f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v})$. Per mostrare che $\mathrm{Ker}(f) \oplus f(V) = V$, sarà quindi sufficiente verificare che $\mathbf{v} - f(\mathbf{v}) \in \mathrm{Ker}(f)$. Tenendo presente che f è un endomorfismo idempotente, si ha

$$f(\mathbf{v} - f(\mathbf{v})) = f(\mathbf{v}) - f(f(\mathbf{v})) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Dunque l'unione delle basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e $f(V)$ è una base di V ed è costituita da autovettori. Quindi f è diagonalizzabile.

Problema 3. Si considerino le seguenti matrici ad entrate reali

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ si calcolino gli autovalori e gli autospazi di A_i.

Soluzione. Sia $\mathcal{E} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
L'unico autovalore di A_1 è 0 (con molteplicità algebrica 3) e l' autospazio a esso associato è $< \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >_\mathbb{R}$.
Gli autovalori di A_2 sono 1 (con molteplicità algebrica 2) e -2 (con molteplicità algebrica 1). L'autospazio associato a 1 è $< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 >_\mathbb{R}$, mentre quello associato a -2 è $< \mathbf{e}_3 >_\mathbb{R}$.
L'unico autovalore di A_3 è 0 (con molteplicità algebrica 3) e l'autospazio a esso associato è $< \mathbf{e}_3 >_\mathbb{R}$.
Gli autovalori di A_4 sono 1 (con molteplicità algebrica 2) -2 (con molteplicità algebrica 1), e i relativi autospazi sono rispettivamente $< \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 >_\mathbb{R}$ e $< \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 >_\mathbb{R}$.

(b) Per ogni $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, si stabilisca se A_i è simile ad A_j.

Soluzione. Per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, A_i è simile a se stessa. A_1 non è simile ad A_2 e A_4 perché A_1 ha autovalori diversi da A_2 e A_4. Inoltre A_1 non è simile ad A_3 perché esse hanno rango diverso: infatti, se due matrici sono simili, esse sono matrici associate a uno stesso endomorfismo e quindi devono avere lo stesso rango. A_2 non è simile a A_3 perché hanno diversi autovalori. Per lo stesso motivo, A_3 non è simile ad A_4. Si osservi che

$$\mathcal{A} := \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_4 associati a autovalori $1, 1, -2$, rispettivamente. Quindi A_4 è diagonalizzabile, e quindi è simile ad A_2 poiché le due matrici hanno stessi autovalori con uguali molteciplità.

(c) Per gli i, j tali che A_i è simile ad A_j, si determini una matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}A_iP = A_j$.

Soluzione. Bisogna trovare una matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che $A_2 = P^{-1}A_4P$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = A_4$, e sia $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'identità. Sia $\mathcal{A} = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$ la base descritta nel punto precedente. Sappiamo, per quanto visto prima, che $\mathcal{A}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f, e

$$M_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f) = A_2.$$

Si ha

$$M_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f) = M_{\mathcal{A},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)M_{\mathcal{E},\mathcal{A}}(\mathrm{Id}).$$

Dunque la matrice cercata è $P = M_{\mathcal{E},\mathcal{A}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$