GE110 - Geometria 1

Esame Scritto X
9 Settembre 2010

Problema 1. Sia U il sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dato da tutte le soluzioni dell'equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.
1.a. Si esibisca una base di U.

Soluzione. U è il luogo in $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni di una sola equazione, quindi ha dimensione 3. Una possibile base è la terna di vettori

$$B = \{v_1 = (1, 1, 0, 0); v_2 = (0, 1, 1, 0); v_3 = (0, 0, 0, 1)\}$$

che è formata di vettori linearmente indipendenti, come risulta (per esempio) osservando che v_1, essendo l'unico vettore in B ad avere la prima coordinata non nulla, non è combinazione lineare di v_2 e v_3, e che v_2 e v_3 non sono ovviamente linearmente dipendenti (altrimenti le loro coordinate nulle coinciderebbero).

1.b. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio dato da tutte le soluzioni dell'equazione

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 0.$$

Si scrivano equazioni cartesiane e parametriche di $U \cap W$, e si esibisca una base per $U \cap W$.

Soluzione.
Le equazioni cartesiane di $U \cap W$ si ottengono mettendo a sistema le equazioni di U e W, ossia sono

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Le due equazioni sono ovviamente linearmente indipendenti, quindi $\dim U \cap W = 4 - 2 = 2$. Le equazioni parametriche di $U \cap W$, scegliendo come parametri $x_1 = t$ e $x_2 = u$, sono

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = u \\ x_3 = -t + u \\ x_4 = t + 2u. \end{cases}$$

Una base si ottiene ponendo $(t, u) = (0, 1)$ e $(t, u) = (1, 0)$, che dà la base $\{(0, 1, 1, 2); (1, 0, -1, 1)\}$.

1.c. Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro e sia W_a il sottospazio dato da tutte le soluzioni dell'equazione

$$x_1 + 2ax_2 - ax_4 = 0.$$

Si calcoli la dimensione di $W_a \cap U$ al variare di a.
Soluzione.
Le equazioni cartesiane di $U \cap W_a$ sono

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ax_2 - ax_4 = 0. \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2a & 0 & -a \end{pmatrix},$$

che ha rango 2 indipendentemente da a, poiché il determinante della sottomatrice 2×2 data dalla prima e terza colonna è nonnullo. Quindi $\dim U \cap W_a = 2$ indipendentemente da a, per il teorema di Rouché.

Problema 2. Sia $n \geq 2$ e sia K un campo fissato di caratteristica 0. Sia $\mathbb{A}$ lo spazio affine standard sullo spazio vettoriale $M_n(K)$ delle matrici quadrate di ordine n ad entrate in K.

2.a. Si consideri il sottinsieme

$$X := \{A = (a_{i,j}) \in M_n(K) : \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0\}$$

(X è il luogo delle matrici per le quali la somma degli elementi sulla diagonale è uguale a zero).

Si dimostri che X è un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ e se ne calcoli la giacitura.

Soluzione.

L'insieme X è dato dalle soluzioni di un'equazione omogenea nelle coordinate naturali (le entrate $a_{i,j}$ di una matrice) dello spazio vettoriale $M_n(K)$. Quindi X è un sottospazio vettoriale di dimensione uguale a $\dim M_n(K) - 1 = n^2 - 1$. Dunque X è anche un sottospazio affine, e coincide con la sua giacitura.

2.b. Si esibisca un esempio di un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ parallelo e non uguale ad X, avente la stessa dimensione di X.

Soluzione. Sia $Y := \{A = (a_{i,j}) \in M_n(K) : \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 1\}$.

Y ha X come giacitura, ma non coincide con X, quindi soddisfa la condizione richiesta.

2.c. Si esibisca un esempio di un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ non parallelo ad X e avente la stessa dimensione di X.

Soluzione. Sia $Z := \{A = (a_{i,j}) \in M_n(K) : a_{1,1} = 0\}$.

Anche Z ha dimensione $n^2 - 1$ perché è anch'esso il luogo in $M_n(K)$ delle soluzioni di un'equazione omogenea. Z è chiaramente un sottospazio vettoriale diverso da X, e quindi soddisfa la condizione richiesta.

Problema 3. Si denoti con $\mathbb{R}[T]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ nell'indeterminata T aventi grado minore o uguale a n.

3.a. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[T]_{\leq 3}$ definita come segue sulla base usuale di $\mathbb{R}[T]_{\leq 2}$

$$f(T^n) = T^{n+1}, \quad \forall n = 0, 1, 2.$$

Si calcolino nucleo e immagine di f.

Soluzione. Usando le basi usuali, $\{1, T, T^2\}$ e $\{1, T, T^2, T^3\}$, la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi (come si verifica anche direttamente) $\mathrm{Im} f =< T, T^2, T^3 >$ e $\mathrm{Ker} f = (0)$.

3.b. Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}[T]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \qquad a + bT + cT^2 + dT^3 \mapsto b + 2cT + 3dT^2$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si determinino il nucleo e l'immagine di g esibendone una base.

Soluzione.

Usando le basi usuali la matrice di g è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

da cui si vede che g è suriettiva e che $\mathrm{Ker} g =< 1 >$.

3.c. Si considerino le due trasformazioni lineari $f \circ g$ e $g \circ f$ e se ne discuta la diagonalizzabilità.

Soluzione.

Consideriamo $f \circ g : \mathbb{R}[T]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[T]_{\leq 3}$.

La sua matrice rispetto alla base usuale si ottiene

$$M(f \circ g) = M(f)M(g)$$

e un calcolo immediato usando le parti precedenti dà che la matrice di $f \circ g$ è la matrice diagonale

$$M(f \circ g) = diag(0, 1, 2, 3).$$

Quindi $f \circ g$ è (ovviamente) diagonalizzabile. Analogamente, $g \circ f : \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[T]_{\leq 2}$ ha come matrice

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = diag(1, 2, 3).$$

Quindi $g \circ f$ è (ovviamente) diagonalizzabile.