Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2009/2010
GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare
Esercizi per casa 1 (di riscaldamento)

Esercizio 1. Si stabilisca, motivando la risposta, se il prodotto riga per colonna è una operazione sull'insieme

$$X := \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 2. Si determinino due matrici $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ tali che $(A-B)(A+B) \neq A^2 - B^2$. Si esibiscano condizioni necessarie e sufficienti sulle matrici A, B affinché valga l'uguaglianza

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2.$$

Esercizio 3. Sia K un campo e sia

$$X_K := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2(K) : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^2 = I_2 \right\}.$$

Si determinino $X_{\mathbb{F}_2}, X_{\mathbb{F}_3}$.

Esercizio 4. Sia K un campo e sia

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in K \right\}.$$

(i) Detto

$$\cdot : M_2(K) \times M_2(K) \longrightarrow M_2(K)$$

il prodotto riga per colonna, si dimostri che $(X, \cdot)$ è un gruppo abeliano.

(ii) Si definisca un'operazione di prodotto esterno (o moltiplicazione scalare)

$$☺ : K \times X \longrightarrow X$$

in modo che X sia un $K-$spazio vettoriale con le operazioni $\cdot, ☺$.

Esercizio 5. Sia K un campo, n un intero positivo e $\mathrm{Sym}_n(K)$ l'insieme delle matrici simmetriche di ordine n a entrate in K. Si dimostri che, se $B_1, B_2 \in \mathrm{Sym}_n(K)$, allora $B_1 B_2 \in \mathrm{Sym}_n(K)$ se, e soltanto se, $B_1 B_2 = B_2 B_1$.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Per ciascuno dei suoi seguenti sottoinsiemi

$$X := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ è surgettiva}\} \cup \{0\} \qquad Y := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(\mathbb{R}) \text{ è finito}\}$$

$$Z := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : 0 \in f(\mathbb{R})\}$$

si dica, motivando la risposta, se è un $\mathbb{R}-$spazio vettoriale con le stesse operazioni di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.