Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2009/2010
GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare
Esercizi per casa 2

Esercizio 1. Dati gli $\mathbb{R}-$sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$,

$$X := < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}} \qquad Y := < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}},$$

si verifichi che $X = Y$, e si determini una base di X.

Esercizio 2. Si considerino le funzioni $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite ponendo

$$f(x) := \operatorname{sen} x, \quad g(x) := \cos x, \quad h(x) := x, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Si stabilisca se $\{f, g, h\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ su $\mathbb{R}$ delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Siano T un'indeterminata su $\mathbb{R}$, $n \in \{1, 2\}$, e si ponga

$$X_n := \{f(T) \in \mathbb{R}[T]_{\leq n} : f(1) = 0\} \qquad Y_n := \{f(T) \in \mathbb{R}[T]_{\leq n} : f(-1) = 0\}.$$

Per ogni $n \in \{1, 2\}$, si verifichi che X_n, Y_n sono $\mathbb{R}-$sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[T]_{\leq n}$, si determini, se esiste, una base per

$$X_n, \qquad Y_n, \qquad X_n \cap Y_n \qquad X_n + Y_n$$

e si stabilisca se la somma $X_n + Y_n$ è diretta.

Esercizio 4. Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali con la sua naturale struttura di $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale. Si stabilisca se il sottoinsieme

$$F := \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, (\sqrt{2} + 2)^{-1}\}$$

di $\mathbb{R}$ è linearmente indipendente su $\mathbb{Q}$, e di determini una base di $< F >_{\mathbb{Q}}$.

Esercizio 5. Si dimostri o si confuti, con un argomento chiaro e conciso, ciascuna delle seguenti asserzioni.

(i) Per ogni intero $n \geq 1$, il sottoinsieme $F_n := \{1, \pi^j : j = 1, \ldots, n\}$ di $\mathbb{R}$, pensato come $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale, è linearmente indipendente.

(ii) Siano K un campo e X un $K-$spazio vettoriale. Un sottoinsieme $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ di X è linearmente indipendente se e soltanto se la somma degli spazi $< \mathbf{x}_1 >_K$ e $< \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 >_K$ è diretta.

(iii) Siano K un campo e X un $K-$spazio vettoriale. Se un sottoinsieme $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ di X è linearmente indipendente, allora anche il sottoinsieme $\{\sum_{j=1}^{i} \mathbf{x}_j : i = 1, \ldots, n\}$ è linearmente indipendente.

(iv) Siano K un campo, X un $K-$spazio vettoriale e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in X$. Se $\sum_{i=1}^{4} \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, allora $< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 >_K = < \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 >_K$.