Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2009/2010
GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare
Esercizi per casa 3

Esercizio 0. Si determini il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 2 \\ h & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1. Si considerino gli $\mathbb{R}-$sottospazi vettoriali

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = 2z \right\}$$

$$X_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \text{ per ogni } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in X \right\}$$

di $\mathbb{R}^3$. Si dimostri che X_1 è un supplementare di X in $\mathbb{R}^3$, e si determinino gli unici vettori $\mathbf{x} \in X, \mathbf{x}_1 \in X_1$ tali che $\mathbf{x} + \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Sia T un'indeterminata su $\mathbb{R}$. Si dimostri che esiste un unico sottospazio proprio X di $\mathbb{R}[T]_{\leq 3}$ contenente i polinomi

$$f(T) := 1 + T, \quad g(T) := 3 - 2T + T^2, \quad h(T) := T^2,$$

e si determinino almeno due supplementari distinti di X in $\mathbb{R}[T]_{\leq 3}$.

Esercizio 3. Siano K un campo, T, U indeterminate su K, n un intero positivo e $K[T,U]_{\leq n}$ l'insieme costituito dai polinomi a coefficienti in K nelle indeterminate T, U di grado al più n. Si dimostri che $K[T,U]_{\leq 2}$ è un $K-$spazio vettoriale con le operazioni usuali.

(i) Si determini la dimensione e una base di $K[T,U]_{\leq 2}$.

(ii) Dati i $K-$sottospazi vettoriali

$$X := \{f(T,U) \in K[T,U]_{\leq 2} : f(1,0) = 0\} \quad Y := \{f(T,U) \in K[T,U]_{\leq 2} : f(0,1) = 0\}$$

di $K[T,U]_{\leq 2}$, si determini dimensione e una base di $X, Y, X \cap Y, X + Y$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, sia I la matrice identità di $M_2(\mathbb{R})$ e $X := < \{I, A^n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\} >_{\mathbb{R}}$. Si dimostri che X è un $\mathbb{R}-$sottospazio finitamente generato di $M_2(\mathbb{R})$ e se ne determini dimensione e una base.

Esercizio 5. Siano K un campo di caratteristica $\neq 2$, X un $K-$spazio vettoriale e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Si dimostri che $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >_K = < \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} >_K$. La precedente asserzione è vera anche se K

ha caratteristica 2? Si motivi la risposta.

Esercizio 6. Si dimostri che $\mathbb{R}$ non è finitamente generato, come $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale. [Suggerimento: può essere utile tenere presente l'Esercizio 5(i) di "Esercizi per casa 2" ☺...]

Esercizio 7. Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali con la sua naturale struttura di $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale, e sia $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Si determini, se esiste, un intero positivo n tale che l'insieme $\{1, \alpha^j : j = 1, \ldots, n\}$ è linearmente dipendente su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 8. Siano n un intero positivo, K un campo e X un $K-$spazio vettoriale di dimensione n. Sia r un intero positivo minore di n, e sia

$$Y_r \subsetneq Y_{r+1} \subsetneq \ldots \subsetneq Y_n := X$$

una catena di $K-$sottospazi vettoriali di X tali che $\dim_K(Y_i) = i$, per $i \in \{r, \ldots, n\}$. Si fissino elementi $\mathbf{y}_j \in Y_j - Y_{j-1}$, per ogni $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, e sia $\mathcal{B}$ una base di Y_r.

(i) Si dimostri che, per ogni $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, l'insieme $\mathcal{B} \cup \{\mathbf{y}_h : h = r+1, \ldots, j\}$ è una base di Y_j.

(ii) Si deduca da (i) che $< \mathbf{y}_{r+1}, \ldots, \mathbf{y}_n >_K$ è un supplementare di Y_r in X.

(iii) Sia T un'indeterminata su $\mathbb{R}$. Si usi (ii) per determinare un supplementare in $\mathbb{R}[T]_{\leq 4}$ del sottospazio

$$Y := \{f(T) \in \mathbb{R}[T]_{\leq 4} : f(0) = f(1) = f(-1) = 0\}$$

[Si costruisca una catena di sottospazi eliminando una condizione per volta e si tenga presente il Teorema di Rouché–Capelli (omogeneo) ☺...]

Esercizio 9. Siano K un campo e I un insieme non vuoto. Si dimostri che l'insieme

$$K^{(I)} := \{f \in K^I : f^{-1}(K - \{0\}) \text{ è finito}\}$$

è un $K-$sottospazio vettoriale di K^I, e se ne determini una base. [Suggerimento: per ogni $i \in I$, si consideri la funzione $\chi_i \in K^I$ definita ponendo $\chi_i(j) := 1$, se $j = i$ e $\chi_i(j) := 0$, se $j \in I - \{i\}$ ☺...]