Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2009/2010
GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare
Esercizi per casa 4

Esercizio 0. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si consideri la retta $\mathcal{R}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Si dimostri o si confuti, con un argomento chiaro e conciso, ciascuna delle seguenti asserzioni.

(i) Esiste un unico piano contenente $\mathcal{R}$ e passante per $O(0,0,0)$.

(ii) Esiste un piano contenente $\mathcal{R}$ e parallelo al piano di equazione cartesiana $x+3y-z=3$.

(iii) Esiste un piano contenente $\mathcal{R}$ e parallelo al piano di equazione cartesiana $x=0$.

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino i punti $A(0,-1,1), B(2,1,-1), C_h(1,0,h)$, con $h \in \mathbb{R}$.
Per ogni $h \in \mathbb{R}$, si determinino tutti i piani passanti per A, B, C_h.

Esercizio 2. Si esibiscano coppie di piani distinti dello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$

(i) che si intersecano in una retta;

(ii) che si intersecano in un punto;

(iii) che sono paralleli;

(iv) che sono sghembi.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 3 in cui sia fissato un riferimento affine, e siano $\mathcal{R}_h, \mathcal{S} \subset \mathbb{A}$ le rette di equazioni (parametriche e cartesiane, rispettivamente)

$$\mathcal{R}_h : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - ht \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad \mathcal{S} : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

(i) Si determini la posizione reciproca di $\mathcal{R}_h$ e $\mathcal{S}$, al variare di $h \in \mathbb{R}$, e si stabilisca se $\mathcal{R}_h \neq \mathcal{S}$, per ogni $h \in \mathbb{R}$.

(ii) Per l'unico valore di h per cui $\mathcal{R}_h, \mathcal{S}$ sono parallele, si determini il piano che le contiene entrambe.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino la retta $\mathcal{R}$ e il piano $\mathcal{P}$ di equazioni parametriche e cartesiane, rispettivamente,

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \qquad \mathcal{P} : x + y + 1 = 0$$

(i) Si determinino 4 piani distinti $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ tali che $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3 \cap \mathcal{P}_4 = \mathcal{R}$.

(ii) Si dimostri che esiste un'unica retta $\mathcal{S}$ contenuta in $\mathcal{P}$ e incidente $\mathcal{R}$, e se ne trovino equazioni parametriche e cartesiane.

(iii) Si determini il sottospazio affine $< \mathcal{R}, \mathcal{S} >$ generato da $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

Esercizio 5. Si consideri lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}$, munito della naturale struttura di spazio affine su se stesso, e sia

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X := \{B \in M_2(\mathbb{R}) : AB = BA\}.$$

(i) Si dimostri che l'insieme $X + A_0 := \{B + A_0 : B \in X\}$ è un sottospazio affine $M_2(\mathbb{R})$, e se ne calcoli la dimensione.

(ii) Si dimostri che esiste un unico iperpiano di $M_2(\mathbb{R})$ passante per A_1 e contenente $X + A_0$, e se ne determini la giacitura.

Esercizio 6. Si consideri lo spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}$ ($n \geq 2$), munito della naturale struttura di spazio affine su se stesso, e sia

$$\mathcal{S} := \left\{ (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) : \sum_{i=2}^{n} a_{i\,i-1} = 1 \right\}, \quad \mathcal{T} := \left\{ (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) : \sum_{i=2}^{n} a_{i-1\,i} = 1 \right\}$$

Si stabilisca se $\mathcal{S}$ è parallelo a $\mathcal{T}$, e si determini $\dim(\mathcal{S} \cap T)$.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione 5. Si caratterizzino le coppie di piani $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{A}$ tali che $< \mathcal{P}, \mathcal{Q} >= \mathbb{A}$ (ovvero, le coppie di piani $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ che generano tutto lo spazio ambiente).

Esercizio 8. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su un $K-$spazio vettoriale V, e sia $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow V$, $(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$ l'applicazione che munisce $\mathbb{A}$ della struttura di spazio affine. Siano $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ sottospazi affini di $\mathbb{A}$ aventi giacitura W, U, rispettivamente, e passanti per P, Q, rispettivamente. Si dimostri che $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \emptyset$ se, e soltanto se, $\overrightarrow{PQ} \in U + W$.

Esercizio 9. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale di dimensione 4, con un riferimento affine fissato.

(i) Si considerino i sottospazi affini di equazioni cartesiane

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x + y = 2 \\ w = 0 \end{cases} \qquad \mathcal{Q} : \begin{cases} x - z = 1 \\ w = 1 \end{cases}$$

Si dimostri che $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ sono piani sghembi e non paralleli e si determini l'unica retta passante per il punto $S = S(0, 1, 0, 0)$ e parallela sia a $\mathcal{P}$ che a $\mathcal{Q}$.

(ii) (Generalizzazione teorica della parte precedente) Siano $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{A}$ piani sghembi e non paralleli. Si dimostri che per ogni punto $S \in \mathbb{A}$ esiste un'unica retta passante per S e parallela sia a $\mathcal{P}$ che a $\mathcal{Q}$.