Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2009/2010
GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare
Esercizi per casa 5

Nel seguito si denoterà sempre con $\mathrm{Id}_X : X \longrightarrow X$ la funzione identità di un insieme non vuoto X.

Esercizio 0. Si dimostri o si confuti, con argomento chiaro e conciso, ciascuna delle seguenti asserzioni.

(i) L'applicazione $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(A) := \det(A)$ è lineare.

(ii) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix}$ è lineare, ed esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

(iii) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix}$ è lineare, ed esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

(iv) Esiste un'applicazione lineare iniettiva $f : M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, per qualche intero positivo $n < 9$.

Esercizio 1. Siano K un campo e V un $K-$spazio vettoriale. Si dimostri che, se $f \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$ ed esiste $\mathbf{v} \in V$ tale che $f(\mathbf{v}) \neq 0$, allora f è surgettivo.

Esercizio 2. Si considerino la base standard $\mathcal{F} := \{1, T, T^2\}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[T]_{\leq 2}$ dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 e la base $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^2$, e sia $\varphi : \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{F}}(\varphi) = \begin{pmatrix} h & h+1 & 1 \\ h & 1 & 1-h \end{pmatrix} \qquad h \in \mathbb{R}.$$

(i) Detta $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$, si calcoli $M_{\mathcal{E}\mathcal{F}}(\varphi)$.

(ii) Si determini, al variare di $h \in \mathbb{R}$, dimensione, una base ed equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}(\varphi)$ e di $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Esercizio 3. Sia X un $\mathbb{R}-$spazio vettoriale di dimensione 3, $\mathcal{B} := \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ una sua base e $h, k \in \mathbb{R}$.

(i) Si discuta, al variare di $h, k \in \mathbb{R}$, esistenza e unicità di applicazioni lineari $f : X \longrightarrow X$ tali che

$$f(\mathbf{x} + 2\mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad f(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{y} + 2\mathbf{z} \quad f(\mathbf{x} + h\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} + (2+k)\mathbf{y} + 2k\mathbf{z}$$

(ii) Dopo aver verificato che per $(h, k) = (2, -1)$ esiste un'unica applicazione lineare $f : X \longrightarrow X$ soddisfacente le condizioni in (i), si scriva $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, e si stabilisca se f è un automorfismo.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{E} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e sia $X := <\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3>_{\mathbb{R}}$.

(i) Si spieghi perché esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3 \quad f|_X = \mathrm{Id}_X.$$

(ii) Si dimostri che f è un automorfismo, e si calcolino una base ed equazioni cartesiane di $f(X+ < \mathbf{e}_3 >_{\mathbb{R}})$ e $f^{-1}(X+ < \mathbf{e}_3 >_{\mathbb{R}})$.

Esercizio 5. Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, I la matrice identità di $M_2(\mathbb{R})$, e sia X il sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ generato dall'insieme $\{I, A^n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$.

(i) Si verifichi che l'applicazione $f : X \longrightarrow X$, $B \mapsto AB$, per ogni $B \in X$, è una ben definita applicazione lineare.

(ii) Si dimostri che f è un automorfismo, e si determini una matrice associata a f e f^{-1}.

Esercizio 6. Siano K un campo, X un $K-$spazio vettoriale e Y un $K-$sottospazio vettoriale di X.

(i) Si dimostri che l'insieme $Y^\sharp := \{f \in \mathrm{Hom}_K(X, X) : f(Y) \subseteq Y\}$ è un $K-$sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}_K(X, X)$.

(ii) Sia $X := \mathbb{R}^3$ e $Y := < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >_{\mathbb{R}}$. Si determini $\dim_{\mathbb{R}}(Y^\sharp)$ e una base di $Y^\sharp$.

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} a-b \\ a-b \end{pmatrix}$, per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(i) Si verifichi che $f \circ f = 0$, e che l'applicazione $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ è un automorfismo. Si esibisca l'inversa di $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

(ii) (Generalizzazione teorica di (i)) Siano X uno spazio vettoriale finitamente generato e $f : X \longrightarrow X$ una applicazione lineare tale che $f^n = 0$, per quanche intero positivo n. Si dimostri che $f - \mathrm{Id}_X$ è un automorfismo di X.