Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2009/2010
GE110 – Geometria 1, Algebra Lineare
Esercizi per casa 6

Esercizio 0. Sia T un'indeterminata su $\mathbb{R}$. Si considerino le applicazioni lineari

$$f : \mathbb{R}[T]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \qquad a + bT + cT^2 + dT^3 \mapsto a - c + (a+b)T + (c+d)T^2$$

$$g : \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[T]_{\leq 3} \qquad a + bT + cT^2 \mapsto c - a + bT + bT^2 + (a+b)T^3$$

(i) Si determini una base di nucleo e immagine di f e g.

(ii) Si determini la fibra $g^{-1}(1 + T + hT^2)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(iii) Si discuta la diagonalizzabilità di $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 1. Siano K un campo, $n \geq 2$ un numero intero e $A \in M_n(K)$. Si considerino le applicazioni $f_A, g_A : K^n \longrightarrow K^n$ definite ponendo

$$f_A(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) := A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$g_A(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) := {}^t((x_1, \ldots, x_n)A)$$

Si dimostri che f_A, g_A sono applicazioni lineari e si caratterizzino le matrici $A \in M_n(K)$ tali che $f_A = g_A$.

Esercizio 2. Sia $\omega \in \mathbb{C}$ una radice terza primitiva dell'unità e sia $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} := \begin{pmatrix} -1 \\ \omega + 1 \end{pmatrix}$.

(i) Si dica se $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{C}^2$, munito della sua naturale struttura di $K-$spazio vettoriale, nei casi $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.

(ii) Posto $X :=< 1, \omega >_{\mathbb{R}}$, si stabilisca se $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >_{\mathbb{R}} = X^2$

Esercizio 3. Siano X un $\mathbb{R}-$spazio vettoriale di dimensione 3, e $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ un suo sottoinsieme linearmente indipendente. Si stabilisca, motivando accuratamente la risposta, se esiste un endomorfismo $f : X \longrightarrow X$ con 3 autovalori distinti tale che $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i$, per $i = 1, 2$.

Esercizio 4. Siano X un $\mathbb{R}-$spazio vettoriale di dimensione 4 e $\mathcal{X} := \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi di X

$$Y :=< \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{z} >_{\mathbb{R}} \qquad Z :=< \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w} >_{\mathbb{R}}$$

Si dimostri o si confuti, con un argomento chiaro e conciso, ciascuna delle seguenti asserzioni.

(i) Esiste un endomorfismo $f : X \longrightarrow X$ tale che $f|_Y$ è l'identità di Y e che Z è l'autospazio di f relativo all'autovalore -1.

(ii) Esiste un endomorfismo $f : X \longrightarrow X$ tale che $Y \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ e $Z = f(X)$.

(iii) Esistono due endomorfismi $f, g : X \longrightarrow X$, con f diagonalizzabile e g non diagonalizzabile, tali che $f|_Y = g|_Y = \mathrm{Id}_Y$ e $< \mathbf{x} >_{\mathbb{R}}$ è l'autospazio (di f e g) relativo all'autovalore 2.

Esercizio 5. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, si consideri il riferimento affine canonico, e siano (x, y, z, w) le coordinate del generico punto di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ rispetto a tale rifermento. Sia $\mathcal{P} \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ il piano di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

e sia $\mathcal{I}_h$, $h \in \mathbb{R}$, la famiglia di iperpiani di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ aventi equazione cartesiana $x + y + hz = 0$.

(i) Per ogni $h \in \mathbb{R}$, si calcoli $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}_h$, e si stabilisca se $\mathcal{P}$ è parallelo a $\mathcal{I}_h$.

(ii) Esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}_h$?

(iii) Si determinino, se esistono, tutti e soli gli iperpiani $\mathcal{I}_h$ contenenti almeno un piano parallelo a $\mathcal{P}$.

Esercizio 6.

(i) Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine e $\mathcal{S}$ un sottospazio affine di $\mathbb{A}$. Si verifichi che, se P, Q sono punti distinti e $P, Q \in \mathcal{S}$, allora la retta passante per P, Q è contenuta in $\mathcal{S}$.

(ii) Siano K un campo e X un $K-$spazio vettoriale. Si munisca X della sua naturale struttura di spazio affine su se stesso. Si verifichi che ogni retta $\mathcal{R} \subseteq X$ è equipotente a K (i.e. esiste una bigezione $\mathcal{R} \longrightarrow K$).

(iii) (Al cospetto dell'infinito ☺...) Siano K un campo INFINITO, X un $K-$spazio vettoriale, n un intero positivo, e $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una collezione di $K-$sottospazi vettoriali PROPRI di X (i.e. $X_i \subsetneq X$, per ogni $i = 1, \ldots, n$). Si dimostri che $\bigcup_{i=1}^n X_i \subsetneq X$. [Suggerimento: i casi $n = 1, 2$ sono banali (perché?). Si proceda per induzione su n. Potrebbe essere utile usare i punti (i), (ii) ☺]