Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
Ge110, Geometria 1: Algebra Lineare
Prof.ssa L. Caporaso
Tutorato 1 - 1 Marzo 2010
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

1. Enunciare la definizione di spazio vettoriale e dare a K^n una struttura di spazio vettoriale su K.

2. Sia $A := \{f : X \to K\}$ l'insieme delle funzioni da un fissato insieme X a valori su un campo K. Dimostrare che A è uno spazio vettoriale su K con le seguenti operazioni:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$$
Dimostrare che l'insieme delle funzioni limitate da $\mathbb{R}$ a valori reali sono uno spazio vettoriale con le operazioni di somma e prodotto ivi definite.
Dimostrare che $K[x]$ è uno spazio vettoriale su K

3. Siano A e B matrici diagonali dimostrare che:
   - $A + B$ è diagonale
   - AB è diagonale
   - $\exists n$ t.c $A^n = (0) \Leftrightarrow A = (0)$
     (sugg.: dimostrare che se $a_1, ..., a_k$ sono gli elementi della diagonale di A allora $a_1^n, ..., a_k^n$ sono gli elementi della diagonale di A^n

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$. Calcolare:
$$A^2 - \mathbb{I}_3 \qquad (A + \mathbb{I}_3) \cdot (A - 2\mathbb{I}_3) \qquad (A)^2 - 2A + \mathbb{I}_3$$

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Calcolare:
$$A^2 - i \cdot A + i \cdot \mathbb{I}_2 \qquad 2A^3 - 2 \cdot A \qquad A \cdot 2A + A$$

6. Calcolare, quando possibile, le seguenti somme e prodotti tra matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A{\cdot}B{\cdot}C \qquad C{\cdot}B{\cdot}A \qquad C{+}(B{\cdot}A) \qquad (A{+}B){\cdot}C \qquad A{\cdot}B \qquad A{+}B \qquad A{\cdot}C{+}C \qquad B{\cdot}C{+}C$$