Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
Ge110, Geometria 1: Algebra Lineare
Prof.ssa L. Caporaso
Tutorato 10 - 19 Maggio 2010
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

1. Sia Π_4 lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata di grado ≤ 4 a coefficienti reali e $F : \Pi_4 \to \Pi_4$ l'applicazione lineare tale che $F(X^n) = n \cdot X^{n-1}$ e $F(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{R}$, per $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Calcolarne nucleo e immagine di F e trovare $M_E(F)$ e $M_B(F)$, dove E è la base canonica $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ e B è la base $\{1, 1+X, 1+X+X^2, X+X^3, \frac{1}{2}X^4 - X\}$.

2. Scrivere le matrici di cambiamento di base $M_{A,B}(\mathbb{I})$ e $M_{B,A}(\mathbb{I})$, dove A e B sono le seguenti basi di $\mathbb{R}^n$:
   (a) $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)(0, 0, 1)\}$ $\quad B = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$
   (b) $A = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 1)\}$ $\quad B = \{(2, 2, 1), (0, -1, 0), (1, 1, 1)\}$
   (c) $A = \{(0, 1, 0), (1, 2, -1), (0, 1, 1)\}$ $\quad B = \{(1, 1, 1), (0, 3, 2), (0, 2, 1)\}$
   (d) $A = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\}$
   $B = \{(0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$
   (e) $A = \{(1, 2, 1, 1), (1, 1, -1, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$
   $B = \{(1, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$
   (sugg: ricordarsi se serve che $M_{A,B}(\mathbb{I}) = M_{A,E}(\mathbb{I}) \cdot M_{E,B}(\mathbb{I})$)

3. Siano $V = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (-1, -1, -1)\}$ e $W = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ due basi rispettivamente di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ e F, G, H, I le seguenti applicazioni lineari:
   $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = (x + y, x + 2z, 2x + y)$
   $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, G(x, y, z) = (x + y + z, y, -2x + y - 2z, x + 2y + 3z)$
   $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, H(x, y, z, w) = (y - z, x - z, w)$
   $I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, I(x, y, z, w) = (x - z + 2w, y + z, 2x - y + w, x + y + w)$
   Determinare le matrici associate a tali applicazioni $M_V(F)$, $M_{W,V}(G)$, $M_{V,W}(H)$ e $M_W(I)$.

4. Sia $T \in End(\mathbb{R}^3)$ l'applicazione lineare tale che:
   $T(0, 1, 2) = (2, 0, 1) \quad T(1, 0, 1) = (0, -1, 1) \quad T(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$
   Trovare le matrici di cambiamento di base $M_{E,B}(\mathbb{I}_3)$ e $M_{B,E}(\mathbb{I}_3)$, dove E è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $B = \{(0, -1, -1), (2, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ e le matrici che rappresentano T rispetto a queste due basi.