Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
Ge110, Geometria 1: Algebra Lineare
Prof.ssa L. Caporaso
Tutorato 11 - 24 Maggio 2010
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

1. Sia $A \in M_n(K)$. Dimostrare che gli autovalori di ${}^tA$ sono gli stessi di A. Anche gli autovettori sono gli stessi?

2. Sia A una matrice quadrata diagonalizzabile. Dimostrare che A^2 è diagonalizzabile. È vera anche l'implicazione inversa?

3. Si consideri la matrice simmetrica: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Dire se A è invertibile e, in caso affermativo, determinare A-1

   (b) Calcolare gli autovalori e gli autospazi di A

   (c) Determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP = D$, dove D è una matrice diagonale

4. Determinare gli autovalori e gli autospazi associati alle seguenti matrici:

   - $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
   - $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   Dire quali di esse sono diagonalizzabili ed eventualmente trovare una matrice B tale che $B^{-1}AB = D$ con D matrice diagonale.

5. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, esibendo una dimostrazione od un controesempio:

   - A diagonalizzabile $\Rightarrow$ A invertibile;
   - A invertibile $\Rightarrow$ A diagonalizzabile.

6. In $\mathbb{R}^2$,$\mathbb{R}^3$,$\mathbb{R}^4$ si considerino le applicazioni lineari:

$$F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

   , associate, rispettivamente, alle matrici:

$$A = M(F) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare la dimensione e una base sia per $Ker(G \circ F)$ sia per $Im(G \circ F)$

(b) Sia H l'iperpiano vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_4 = 0$. Determinare la dimensione e una base del sottospazio $G = H \cap Ker(G \circ F)$

(c) Calcolare $(G \circ F)(H)$ e $(G \circ F)^{-1}(K)$ dove K è l'iperpiano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $y_2 = 0$.

7. In $\mathbb{R}^3$ si considerino le basi:

$$B_1 = \{(1,1,1),(0,2,3),(1,0,3)\}, \qquad B_2 = \{(4,3,1),(0,1,2),(1,0,1)\}$$

(a) Determinare la matrice A del cambiamento di base da B_1 a B_2

(b) Calcolare le basi duali B_1^* e B_2^*

(c) Determinare la matrice Q del cambiamento di base da B_1^* a B_2^*