Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
Ge110, Geometria 2: Algebra Lineare
Prof.ssa L. Caporaso
Tutorato 3 - giugno 2010
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

1. Determinare autovalori e autospazi delle seguenti matrici reali, dire se sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, trovare una matrice M tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ sia diagonale:
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Stabilire per quali valori del parametro k le seguenti matrici reali sono diagonalizzabili: $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & k \end{pmatrix}$

3. Dimostrare che l'unica matrice unitriangolare (superiore o inferiore) diagonalizzabile di ordine n è la matrice identità. (Si ricorda che una matrice unitriangolare è una matrice triangolare avente tutti 1 sulla diagonale principale).

4. Sia V un K-spazio vettoriale e $F \in End(v)$ e $Spec(F)$ $=\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, dimostrare che $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$

5. Determinare la matrice associata a $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ rispetto alla base canonica, dire se é invertibile, diagonalizzabile e in caso calcolare l'inversa e una matrice M t.c. $M^{-1}FM$ sia diagonale:
   - $F(1,1,0,0,) = (2,1,1,0)$ $F(2,1,0,1) = (1,1,0,1)$ $F(1,0,0,1) = (1,1,1,1)$ $F(0,0,1,0) = (0,1,0,0)$
   - $F(1,0,2,0,) = (0,1,0,0)$ $F(0,1,2,0) = (0,0,1,0)$ $F(0,0,1,1) = (1,0,1,0)$ $F(0,1,0,0) = (1,1,1,1)$

6. Determinare il valore del parametro h per cui le rette r e s dello spazio affine reale tridimensionale sono complanari; per tale valore, determinare il loro piano comune, verificare se sono parallele o incidenti e, in quest'ultimo caso, trovare il loro punto di intersezione:
   (a) $r : 2x + y - 3 = 0 = y - z \qquad s : z + h = 0 = x - 2z$
   (b) $r : x + 2y = 0 = 2x - z - 3 \qquad s : y + z = 0 = hx + y - z$
   (c) $r : y - hz = 0 = x - 1 \qquad s : x + z = 0 = x + y + 2z$