Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
Ge110, Geometria 1: Algebra Lineare
Prof.ssa L. Caporaso
Tutorato 5 - 29 Marzo 2010
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

1. Calcolare il rango delle seguenti matrici:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$A \cdot B \qquad B \cdot C \qquad C \cdot D \qquad D \cdot A$

2. Mostrare che una matrice $M \in M_{n,m}(K)$ ha rango $\leq 1 \Leftrightarrow$ esistono $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ e $(b_1, \ldots, b_m)$ tali che $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot (b_1, \ldots, b_m) = M$.

3. Dimostrare che il determinante del prodotto di due matrici quadrate di ordine 2 ad entrate in un campo K è uguale al prodotto dei determinanti.

4. Trovare le dimensioni di U, W, $U + W$, $U \cap W$ e una base per ognuno dei seguenti spazi:
   (a) $U = \langle (3,1,2), (3,3,8), (0,1,3) \rangle$
   $W = \langle (6,1,4), (1,3,5), (-5,2,1) \rangle$
   (b) $U = \langle (1,0,0,1), (1,1,0,1), (0,1,-1,1) \rangle$
   $W = \langle (2,1,0,0), (0,0,1,-1), (2,1,1,2) \rangle$
   (c) $U = \langle (1,2,1,1), (3,0,2,1), (5,7,5,4) \rangle$
   $W = \langle (3,2,1,0), (1,2,1,1), (2,0,0,1) \rangle$
   (d) $U = \langle (1,2,3,4,5), (2,4,0,2,4), (1,0,1,0,1), (1,0,4,3,4) \rangle$
   $W = \langle (1,1,1,1,1), (0,1,0,1,0), (3,0,3,0,3) \rangle$

5. Calcolare il determinante delle seguenti matrici a coefficienti in $K = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}$ al variare dei parametri $a, b, c \in K$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Utilizzare il teorema di Rouchè-Capelli per determinare il numero di soluzioni, al variare del parametro k, dei seguenti sistemi omogenei a coefficienti in $\mathbb{R}$. Determinarne poi le soluzioni esplicite.

a) $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ y + z + 2w = 0 \\ 2x + 3z + w = 0 \\ y + w = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2y + 5z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} kx + y + kz = 0 \\ 3x + y + kz = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 7x + z = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + ky + z = 0 \\ y + kz = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} w + x + y + z = 0 \\ 9kw + 7y + 5z = 0 \\ 4ky + 2z = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} w + x + y + z = 0 \\ 9kw + 7y + 5z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases}$