Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2009/2010
Ge110, Geometria 1: Algebra Lineare
Prof.ssa L. Caporaso
Tutorato 9 - 10 Maggio 2010
Matteo Acclavio, Luca Dell'Anna
www.matematica3.com

1. Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, v_2 \dots v_n \in V$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere; se vere, dimostrarle, altrimenti esibire un controesempio:
   (a) Se $F \in End(V)$ e $v_1, v_2 \dots v_n$ sono linearmente dipendenti, allora $F(v_1), F(v_2) \dots F(v_n)$ sono linearmente dipendenti.
   (b) Se $F \in End(V)$ e $v_1, v_2 \dots v_n$ sono linearmente indipendenti, allora $F(v_1), F(v_2) \dots F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.
   (c) Se $F \in GL(V)$ e $v_1, v_2 \dots v_n$ sono linearmente indipendenti, allora $F(v_1), F(v_2) \dots F(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

2. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base di $\mathbb{R}^4$. Mostrare che non può esistere un'applicazione lineare $F \in End(\mathbb{R}^4)$ tale che:
   $F(e_1+e_3) = e_1 \qquad F(e_2+e_4) = e_2 \qquad F(e_1+e_2) = e_3 \qquad F(e_3+e_4) = e_4$

3. Data un'applicazione lineare $F : U \longrightarrow V$, definiamo il *nucleo di* $F := kerF := F^{-1}(0)$ e l'*immagine di* $F := ImF := \{y \in V \mid \exists\, x \in U : F(x) = y\}$. Siano U, V, W tre K-spazi vettoriali e $G : U \to V$ e $F : V \to W$ due applicazioni lineari.
   - Mostrare che $kerF$ e ImF sono sottospazi vettoriali rispettivamente di U e di V.
   - Mostrare che $\ker(G) \subseteq \ker(F \circ G)$ e $Im(F \circ G) \subseteq Im(F)$

4. Date le seguenti applicazioni lineari
   - $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y) = (x - 2y, x + y, x + y)$
   - $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $g(x, y, z) = (x + y, x - y)$
   - $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $h(x, y, z) = (2x + y)e_1 + (y - z)e_2$

   calcolarne nucleo, immagine e matrice associata rispetto alle basi canoniche.

5. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ definita da:
   $f(x, y, z, w) = (z + w, z + w, z + w, x + y, x + y, x + y)$
   - Calcolare $f^{-1}((1, 2, 1, 1, 0, 0))$ ed $f^{-1}((2, 2, 2, 1, 1, 1))$
   - Calcolare $dim(kerf)$ e $dim(Im(f))$
   - Calcolare la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^6$

6. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$definita come $f(1, 1) = (1, 0, 0, -1)$, $f(1, 2) = (-2, 0, 0, 2)$, calcolare $f^{-1}((3, 0, 0, -3))$.