GE3 - TOPOLOGIA

Esonero

11 Aprile 2008

COGNOME e NOME :

Problema 1.

Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Per ciascuno dei punti seguenti, da **(a)** a **(h)**, si dica se $\mathbb{R}$ ammette un sottinsieme X con la proprietà descritta. In caso affermativo si dia un esempio, in caso negativo si giustifichi la risposta.

(a) X né aperto né chiuso.

(b) X sia aperto che chiuso.

(c) X chiuso e non compatto.

(d) X compatto e non chiuso.

(e) X connesso e non compatto.

(f) X compatto e non connesso.

(g) X connesso e non connesso per archi.

(h) X connesso per archi e non connesso.

Problema 2. Sia $\{x_n\}$ una successione convergente in uno spazio topologico X, con X insieme infinito. Si dica in quale dei seguenti casi, da **(2.a)** a **(2.d)**, il limite della successione è unico.

(2.a) X ha la topologia banale.

(2.b) X ha la topologia discreta.

(2.c) X ha la topologia cofinita.

(2.d) X è il prodotto topologico di una famiglia di spazi di Hausdorff.

Problema 3. Sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una distanza su un insieme X. Per ciascuna delle due applicazioni d_1 e d_2 definite in **(3.a)** e**(3.b)**, si stabilisca se è una distanza su X. In caso affermativo, si confronti la topologia indotta da d con quella indotta da d_i, $i = 1, 2$, dicendo quale delle due è più fine, o se coincidono.

(3.a) Per ogni $x, y \in X$, sia

$$d_1 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d_1(x, y) := 2d(x, y).$$

(3.b) Per ogni $x, y \in X$, sia

$$d_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d_2(x,y) := d(x,y)^2.$$

Problema 4. Si fissi la topologia euclidea su $\mathbb{R}^1$ e $\mathbb{R}^2$. Vero o falso?

(4.a) $\mathbb{R}^1$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

(4.b) $\mathbb{R}^1$ è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^2$.

(4.c) $\mathbb{R}^1$ è omeomorfo al cerchio S^1.

(4.d) $\mathbb{R}^1$ è omeomorfo all'intervallo $I = [0, 1]$.

(4.e) $\mathbb{R}^1$ è omotopicamente equivalente all'intervallo $I = [0, 1]$.

(4.f) $\mathbb{R}^2$ è omeomorfo al disco aperto $D_1(O)$ (di centro l'origine e raggio 1).

(4.g) $\mathbb{R}^2$ è omotopicamente equivalente al disco aperto $D_1(O)$.