Prima prova di valutazione in itinere - Soluzioni

corso di GE3

A.A. 2007/2008

Problema 1. Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Per ciascuno dei punti seguenti si dica se $\mathbb{R}$ ammette un sottinsieme X con la proprietà descritta. In caso affermativo si dia un esempio, in caso negativo si giustifichi la risposta.

1. X né aperto né chiuso.
2. X sia aperto che chiuso.
3. X chiuso e non compatto.
4. X compatto e non chiuso.
5. X connesso e non compatto.
6. X compatto e non connesso.
7. X conesso e non connesso per archi.
8. X connesso per archi e non connesso.

Soluzione:

1. L'intervallo $[0, 1)$ non è aperto perché contiene 0 che è un suo punto di frontiera e non è nemmeno chiuso perchè non contiene 1 che è anche un punto di frontiera.

   Altri controesempi possono essere l'insieme $\mathbb{Q}$ o l'insieme dei punti di una successione convergente per cui nessun termine è uguale al limite (le verifiche sono lasicate al lettore).

2. L'insieme vuoto e tutto l'insieme $\mathbb{R}$ sono insiemi sia aperti che chiusi e sono gli unici.

3. È sufficiente prendere un qualsiasi chiuso non compatto; $\mathbb{R}$ stesso è un esempio valido.

4. Non esiste. In $\mathbb{R}$ gli insiemi compatti sono quelli chiusi e limitati quindi non può esserci un insieme compatto che non sia chiuso.

5. Un qualsiasi intervallo che non sia limitato o che non sia chiuso è connesso ma non compatto. $\mathbb{R}$ è ancora un valido esempio ma lo sono anche $(0, 1)$ (non è chiuso) e $[0, +\infty)$ (non è limitato).

6. è sufficiente prendere l'unione di due compatti disgiunti. Un qualunque insieme con due soli punti $\{a; b\}$ è chiuso (unione di chiusi poiché $\mathbb{R}$ è T1) e limitato, quindi compatto, ma non connesso (ha la topologia discreta e più di un elemento).

7. Non esiste. In $\mathbb{R}$ gli unici insiemi connessi sono gli intervalli che sono anche connessi per archi.

8. Non esiste. Ogni spazio topologico connesso per archi è anche conneso.

Problema 2. Sia $\{x_n\}$ una successione convergente in uno spazio topologico X, con X insieme infinito. Si dica in quale dei seguenti casi il limite della successione è unico.

1. X ha la topologia banale.

2. X ha la topologia discreta.

3. X ha la topologia cofinita.

4. X è il prodotto topologico di una famiglia di spazi di Hausdorff.

Soluzione:

1. Nella topologia banale tutte le successioni convergono a tutti i punti dello spazio quindi, se X è infinito, tutte le successioni hanno infiniti limiti.

2. X con la topologia discreta è uno spazio di Haussdorf, quindi vale l'unicità del limite.

3. Il limite non è sempre unico. Ad esempio sia $X := \mathbb{R}$ e $x_n := n$. Questa successione converge a tutti i punti di X: infatti preso un qualsiasi punto $x \in \mathbb{R}$, ogni suo itorno U dovrà contenere tutti i punti di $\mathbb{R}$ tranne al più un numero finito; in particolare U conterrà tutti i termini della successione tranne, al più, un numero finito; chiamato $a_{\overline{m}}$ l'ultimo elemento della successione ad essere escluso da U si ha che per ogni $n > \overline{m}$ $a_n \in U$ e quindi la successione tende ad x.

4. Il prodotto topologico di spazi di Haussdorf è ancora uno spazio di Haussdorf e in uno spazio di Haussdorf vale il teorema di unicità del limite.

Problema 3. Sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una distanza su un insieme X. Per ciascuna delle due applicazioni d_1 e d_2 definite sotto, si stabilisca se è una distanza su X. In caso affermativo, si confronti la topologia indotta da d con quella indotta da d_i, $i = 1, 2$, dicendo quale delle due è più fine, o se coincidono.

1. Per ogni $x, y \in X$, sia
$$d_1 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d_1(x, y) := 2d(x, y).$$

2. Per ogni $x, y \in X$, sia
$$d_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad d_2(x, y) := d(x, y)^2.$$

Soluzione

1. d_1 è una distanza: d_1 è simmetrica perché d lo è; $d_1(x, y)$ non è mai negativo perché è il doppio di qualcosa che non è mai negativo ed è zero se e solo se $d(x, y) = 0$, che accade solo quando $x = y$. Similmente la disuguaglianza triangolare si verifica semplicemente moltiplicando per 2 entrambi i membri della disuguaglianza triangolare verificata da d.

   La topologia indotta è la stessa. Infatti qualunque disco della metrica d_1, $D_r^1(x)$, è uguale al disco della metrica d con lo stesso centro e raggio doppio; viceversa ogni disco della metrica d è anche un disco della d_1 con lo stesso centro e ragio pari alla metà del raggio del disco. Siccome l'insieme dei dischi è lo stesso per entrambe le metriche, anche la topologia indotta è la stessa.

2. d_2 non è in generale una metrica perché non è detto che soddisfi la disuguaglianza triangolare. Come controesempio si consideri $X := \mathbb{R}^2$ e sia d la distanza euclidea: prendiamo i punti $A := (0, 0)$, $B := (1, 0)$ e $C := (-1, 1)$, si ha che $d_2(B, C) = 5$ mentre $d_2(B, A) + d_2(A, C) = 2 + 1 = 3$.

Problema 4. Si fissi la topologia euclidea su $\mathbb{R}^1$ e $\mathbb{R}^2$. Vero o falso?

1. $\mathbb{R}^1$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathbb{R}^1$ è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathbb{R}^1$ è omeomorfo al cerchio S^1.
4. $\mathbb{R}^1$ è omeomorfo all'intervallo $I = [0, 1]$.
5. $\mathbb{R}^1$ è omotopicamente equivalente all'intervallo $I = [0, 1]$.
6. $\mathbb{R}^2$ è omeomorfo al disco aperto $D_1(O)$ (di centro l'origine e raggio 1).
7. $\mathbb{R}^2$ è omotopicamente equivalente al disco aperto $D_1(O)$.

Soluzione

1. Falso. Sappiamo che $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è connesso (un insieme sia aperto che chiuso è, per esempio, $(0, +\infty)$). Se ci fosse un omeomorfismo ϕ si dovrebbe avere che $\mathbb{R}^2 \setminus \{\phi(0)\}$ è sconnesso ma sappiamo che se togliamo un qualunque punto a $\mathbb{R}^2$ questo rimane connesso per archi e quindi connesso. Dunque non può esistere l'omeomorfismo ϕ.

2. Vero. Si considerino ad esempio le applicazioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definite da $f(x, y) := x$ e $g(x) := (x, 0)$. Si ha che $f \circ g$ è l'identità su $\mathbb{R}$ (che è omotopa a sé stessa) mentre $g \circ f$ è la proiezione sull'asse x. La seguente applicazione è una omotopia tra $g \circ f$ e l'identità di $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^2 \times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ((x, y), t)) & \longmapsto & (x, yt) \end{array}$$

   l'applicazione ϕ è continua e fissando $t = 0$ si trova $\phi\left((x, y), 0\right) = (x, 0) = (g \circ f)\left((x, y)\right)$ mentre fissando $t = 1$ si trova l'identità su $\mathbb{R}^2$.

3. Falso. La motivazione è la stessa del punto 1: se togliamo un punto da $\mathbb{R}$ otteniamo uno spazio sconnesso mentre se togliamo un qualsiasi punto da S^1 otteniamo uno spazio che è ancora connesso per archi, euini connesso.

4. Falso. I è uno spazio compatto mentre $\mathbb{R}$ non lo è e il fatto che la compattezza sia una proprietà topologica significa che se fossero omeomorfi dovrebbero essere entrambi compatti o entrambi non compatti, quindi non sono omeomorfi.

5. Vero. Sia i l'inclusione di I in $\mathbb{R}$ e sia $j : \mathbb{R} \to I$ la funzione continua definita come
$$j(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ x \text{ se } x \in I \\ 1 \text{ se } x > 1 \end{cases} .$$
Si ha che $i \circ j$ è l'identità su I (che è omotopa a sé stessa) mentre è possibile costruire una omotopia tra l'identità su $\mathbb{R}$ e $j \circ i$ come segue:
$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R} \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} tx & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \in I \\ 1 + t(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases} \end{array} .$$
Questa funzione è continua e sostituendo a t i valori 0 e 1 si ottengono rispettivamente $j \circ i$ e l'identità su $\mathbb{R}$.

6. Vero. Un omeomorfismo è $f : \mathbb{R}^2 \to D_1(O)$ definito da $f(x) := \frac{x}{||x||+1}$; è facile vedere che f è continua e che $f(x)$ appartiene effettivamente a $D_1(O)$ (la norma di $f(x)$ è sempre minore di 1); l'applicazione $g : D_1(O) \to \mathbb{R}^2$ definita da $g(y) := \frac{y}{1-||y||}$ è pure continua (gli elementi di $D_1(O)$ hanno tutti norma minore di 1, quindi il denominatore non ha problemi) e si verifica che entrambe le composizioni danno l'identità.

7. Vero. Ogni spazio topologico è omotopicamente equivalente a sé stesso e quindi anche a tutti gli spazi topologici ad esso omeomorfi e abbiamo appena dimostrato che $\mathbb{R}^2$ e $D_1(O)$ sono omeomorfi.