Prova finale, secondo appello - Soluzioni

corso di GE3

A.A. 2007/2008

Problema 1.

1. Si dia la definizione di struttura metrica (ovvero di distanza) su un insieme non vuoto X. Si definisca la topologia indotta su X da una struttura metrica.

2. Si dia un esempio di spazio topologico non metrizzabile.

Soluzione:

1. Per la soluzione si veda il libro di testo.

2. Uno spazio topologico X con almeno due punti e dotato della topologia banale non è metrizzabile. Infatti tutti gli spazi topologici metrizzabili sono di Haussdorf e uno spazio topologico banale non lo è.

Problema 2. In questo problema si considera $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Per le due affermazioni seguenti si dica se sono vere o false, giustificando la risposta.

1. Esiste un'applicazione continua e suriettiva
$$f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

2. Esiste un'applicazione continua e suriettiva
$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Soluzione:

1. Esistono molti esempi; uno di essi è $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$. Un'altro esempio, con una funzione razionale, è $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

2. Non esiste una tale applicazione. Infatti l'immagine di uno spazio topologico compatto tramite un'applicazione continua è compatta, quindi l'immagine di f dovrebbe essere compatta. Per questo motivo richiedere che f sia suriettiva significa che l'immagine, che deve essere $\mathbb{R}$, sia compatto, il che non è.

Problema 3. In $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea si consideri il sottoinsieme Z_n

$$Z_n := \{(k, 0, \dots, 0) \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Dunque Z_n è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Z}$ e, per esempio, $z_1 = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Vero o falso:

1. $\mathbb{R} \setminus Z_1$ è connesso per archi.
2. $\mathbb{R}^2 \setminus Z_2$ è connesso per archi.

Soluzione:

1. Falso. Gli unici sottoinsiemi connessi per archi di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli e $\mathbb{R} \setminus Z_1$ non lo è. Infatti esso contiene, ad esempio, sia $\frac{1}{2}$ che $-\frac{1}{2}$ ma non contiene 0 che è compreso tra essi (si ricorda che per definizione un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se ogni volta che contiene due elementi di $\mathbb{R}$ contiene anche tutti i numei reali compresi tra essi).

2. Vero. Esistono moltissimi modi per costruire un arco esplicitamente. Ad esempio sia A il punto $(0;1)$, B il punto $(0;-1)$ e C il punto $\left(\frac{1}{2};0\right)$. Per ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus Z_2$, se entrambi i punti hanno seconda coordinata non negativa l'arco ottenuto concatenando i segmenti $\overline{xA}$ e $\overline{Ay}$ è tutto contenuto nell'insieme; allo stesso modo, se entrambni i punti hanno seconda coordinata non positiva $\overline{xB} * \overline{By}$ è un arco che li congiunge. Se i segni delle coordinate sono diversi, supponendo segno positivo per x e negativo per y, l'arco $\overline{xA} * \overline{AC} * \overline{CB} * \overline{By}$ congiunge x e y rimanendo dentro l'insieme considerato.

Problema 4. Si dia un esempio di spazio topologico il cui gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, dove $\mathbb{Z}_2$ indica il gruppo con due elelmenti.

Soluzione: è sufficiente prendere uno spazio topologico X con gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}$ (ad esempio S^1) ed uno spazio topologico Y con gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ (ad esempio il piano proiettivo reale). Il prodotto topologico $X \times Y$ avrà gruppo fondamentale isomorfo alla somma diretta dei gruppi fondamentali dei fattori, cioé $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Problema 5. Si esibiscano due varietà topologiche connesse, non omeomorfe, aventi entrambe gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Soluzione: Esistono molti esempi. Una possibilità è di prendere la circonferenza S^1 e il piano privato dell'origine $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$. Entrambi sono varietà topologiche (di dimensione rispettivamente 1 e 2) e hanno gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$ ma non sono omeomorfi perchè due varietà topologiche isomorfe devono avere la stessa dimensione.

Problema 6. Sia S una superficie compatta e connessa. Vero o falso:

1. $\pi_1(S) = \{0\} \Rightarrow \chi(S) = 0$.
2. $\chi(S) = 0 \Rightarrow \pi_1(S) = \{0\}$.

Soluzione:

1. Falso. Un controesempio è dato dalla superficie sferica S^2 che è semplicemente connessa ($\pi_1(S^2) = \{0\}$) ma ha caratteristica topologica pari a 2.

2. Falso. Un controesempio è dato dal toro ($S^1 \times S^1$) che ha caratteristica topologica pari a 0 ma ha come gruppo fondamentale $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.