Prova finale, appello X - Soluzioni

corso di GE3

A.A. 2007/2008

Problema 1. Siano X e Y due spazi topologici.

1. Cosa si intende per applicazione continua $f : X \longrightarrow Y$?
2. Cosa si intende per applicazione aperta $f : X \longrightarrow Y$?
3. Si dia un esempio di applicazione continua, non aperta.
4. Si dia un esempio di applicazione aperta, non continua.

Soluzione:

1. Un'applicazione si dice continua se e solo se la preimmagine di ogni sottoinsieme aperto di Y è un aperto di X.
2. Un'applicazione si dice aperta se e solo se l'immagine di ogni sottoinsieme aperto di X è un'aperto di Y
3. Esistono molti esempi. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (con la topologia euclidea da ambo le parti) l'applicazione $x \mapsto x^2$. f è continua (si veda un qualsiasi testo di analisi matematica) ma non aperta; ad esempio l'immagine dell'intervallo aperto $(-1, 1)$ è l'intervallo $[0, 1)$, che non è aperto.
4. Esistono molti esempi. Siano $X = (\mathbb{R}, \mathcal{E})$ e $Y = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ rispettvamente l'insieme dei numeri reali con la topologia euclidea e con la topologia discreta; sia f l'identità su $\mathbb{R}$, il che vuol dire che l'immagine e la preimmagine di un qualsiasi sottoinsieme è il sottoinsieme stesso. Si ha che f è aperta, poiché ogni aperto euclideo è anche un aperto nella topologia discreta, ma non continua (ad esempio $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ e $\{0\}$ è un aperto nella topologia discreta ma non in quella euclidea).

   Scambiando X e Y in questo esempio si ottiene un altro esempio per il punto precedente.

Problema 2. Sia X uno spazio topologico dotato della topologia cofinita. Si dimostri che X è uno spazio metrico se e solo se X è finito.

Soluzione: Se X è finito la topologia cofinita è di fatto la topologia discreta che è la topologia indotta dalla distanza

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se x = y} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti i dischi di raggio $\frac{1}{2}$ di questa metrica sono tutti gli insiemi con un solo elemento, che costituiscono una base per la topologia discreta.

Viceversa, se X è infinito allora non esistono aperti disgiunti non vuoti: siano U e V due aperti non vuoti; si ha che $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$, che è finito perché $(X \setminus U)$ e $(X \setminus V)$ sono finiti ed è quindi diverso da X, quindi $U \cap V \neq \emptyset$. Se non esistono aperti propri disgiunti non esistono nemmeno intorni disgiunti e quindi X non può essere di Haussdorf. Siccome tutti gli spazi metrizzabili sono di Haussdorf, X non è metrizzabile.

Problema 3. Siano X, X_1 e X_2 spazi topologici connessi per archi. Vero o falso:

1. Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso, allora $\pi_1(X) = \{1\}$.
2. Se $\pi_1(X_1) = \pi_1(X_2) = \{1\}$ allora $\pi_1(X_1 \times X_2) = \{1\}$.
3. Se X_1 e X_2 sono sottospazi di X e $\pi_1(X_1) = \pi_1(X_2) = \{1\}$ allora $\pi_1(X_1 \cup X_2) = \{1\}$.
4. Se X è omotopo a S^1 allora $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$.
5. Se $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ allora X è omeomorfo a S^1.

Soluzione:

1. Vero. Sia x_0 il punto base dei cappi e γ un qualunque cappio. Possiamo scrivere l'omotopia

$$\begin{array}{rccl} F: & I \times I & \to & \mathbb{R}^n \\ & (s,t) & \mapsto & x_0 + s(\gamma(t) - x_0) \end{array}$$

   F è continua, $F(0,t) = x_0$ e $F(1,t) = \gamma(t)$ per ogni t e la convessità di X assicura che l'immagine di F è contenuta in X; quindi F è un omotopia in X tra il cappio costante e γ. Questo significa che ogni cappio γ è contraibilie, cioé X è semplicememnte connesso.

2. Vero. In generale il gruppo fondamentale di uno spazio prodotto è il prodotto cartesiano dei gruppi fondamentali dei fattori.

3. Falso. Come controesempio si può prendere $X = \mathbb{C}$ con la topologia euclidea, X_1 come l'insieme dei numeri complessi di modulo 1 eccetto 1 e X_2 come l'insieme dei numeri complessi di modulo 1 eccetto -1. $X_1 \cup X_2$ è la circonferenza S^1 che ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$ mentre x_1 e X_2 sono entrambi omeomorfi ad un intervallo chiuso e quindi sono semplicemente connessi.

4. Vero. In generale se due spazi topologici sono omotopi hanno lo stesso gruppo fondamentale e il gruppo fondamentale di S^1 è $\mathbb{Z}$.

5. Falso. Esistono molti esempi. Una possibilità è di prendere la circonferenza S^1 e il piano privato dell'origine $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$. Entrambi sono varietà topologiche, di dimensione rispettivamente 1 e 2, e hanno gruppo fondamentale $\mathbb{Z}$ ma non sono omeomorfi perchè due varietà topologiche omeomorfe devono avere la stessa dimensione.

Problema 4. Sia S^2 la sfera con l'usuale topologia euclidea.

Sia X uno spazio topologico tale che $X = X_1 \cup X_2$, con $X_i \approx S^2$ per $i = 1, 2$ e $X_1 \cap X_2$ è un punto. La topologia su X è l'usuale topologia quoziente indotta da $X_1 \coprod X_2 \longrightarrow X$. (Ovvero X è unione di due copie della sfera S^2 aventi un unico punto in comune.)

Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

Soluzione: Risolviamo il problema applicando il teorema di Van Kampen. Per questo dobbiamo individuare due aperti semplicemente connessi la cui intersezione sia connessa per archi. Sia $p_1 \in X_1 \setminus X_2$ e $p_2 \in X_2 \setminus X_1$. Si ha che $X \setminus \{p_1\}$ è omotopo a X_2, visto che la sfera X_1, tolto il punto p_1, si puo' contrarre al punto di intersezione, ed è quindi semplicemente connesso; un discorso analogo vale per $X \setminus \{p_2\}$. La loro intersezione è conenssa per archi, dunque essi danno la scomposizione richiesta e X è semplicemente connesso.

Problema 5. Sia S una superficie compatta e connessa. Vero o falso:

1. $\pi_1(S) = \{0\} \Rightarrow \chi(S) = 0$.
2. $\chi(S) = 0 \Rightarrow \pi_1(S) = \{0\}$.

Soluzione:

1. Falso. Un controesempio è dato dalla superficie sferica S^2 che è semplicemente connessa ($\pi_1(S^2) = \{0\}$) ma ha caratteristica topologica pari a 2.
2. Falso. Un controesempio è dato dal toro ($S^1 \times S^1$) che ha caratteristica topologica pari a 0 ma ha come gruppo fondamentale $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.