Prova finale - Soluzioni

corso di GE3

A.A. 2007/2008

Problema 1. Sia X uno spazio topologico.

Per ciascuna delle affermazioni seguenti si dica se è vera o falsa dimostrando la risposta.

1. L'unione di una famiglia (finita o infinita) di sottoinsiemi chiusi di X è chiusa.
2. L'intersezione di una famiglia di sottoinsiemi compatti di X è compatta.
3. L'intersezione di una famiglia di sottoinsiemi connessi di X è connessa.

Soluzione:

1. Falso. L'unione di una famiglia infinita di chiusi non è in generale un chiuso: ad esempio consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea; abbiamo che $(0,1]$ non è chiuso e $(0,1] = \bigcup_{x\in(0,1]}\{x\}$, ma uno per uno ogni insieme $\{x\}$ è chiuso.
2. Falso. Per costruire un controesempio osserviamo che se uno spazio topologico X contiene un punto x che non appartiene a nessun aperto proprio, quello spazio topologico deve essere compato. Infatti ogni ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$, per essere un ricoprimento, deve contenere un aperto $U_i \ni x$ ma l'unico aperto a cui x appartiene è X, quindi $U_i = X$ e $\{X\}$ è un sottoricoprimento finito.

   Vogliamo adesso costruire un controesempio prendendo uno spazio non compatto ed aggiungendovi due punti che non sono contenuti in aperti propri. Sia $X := \mathbb{R} \cup \{\heartsuit; \spadesuit\}$ e prendiamo la topologia i cui aperti sono tutti gli aperti euclidei e l'intero insieme X. Per quanto detto prima i sottospazi $\mathbb{R} \cup \heartsuit$ e $\mathbb{R} \cup \spadesuit$ sono compatti ma la loro intersezione è $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, che non è compatto.
3. Falso. Come possibile controesempio si considerino gli insiemi $S^+ := \{(x,y) \in S^1 / x \geq 0\}$ e $S^- := \{(x,y) \in S^1 / x \leq 0\}$. Entrambi sono omeomorfi ad un intervallo chiuso, quindi connessi per archi, ma la loro intersezione è l'insieme $\{(0,1);(0,-1)\}$ che non è connesso.

Problema 2. Sia X uno spazio topologico.

Si consideri la "diagonale" $\Delta \subset X \times X$, ovvero

$$\Delta := \{(x,x) \in X \times X,\ \forall x \in X\}.$$

Si dimostri che Δ è chiusa in $X \times X$ se e solo se X è di Hausdorff (la topologia su $X \times X$ è la topologia prodotto).

Soluzione: Supponiamo per primo che X sia di Haussdorf e dimostriamo che la diagonale è chiusa. Sia $\Omega := X \times X \setminus \Delta$ il complementare della diagonale; per dimostrare che Ω è aperto prendiamo un qualunque suo punto $(x; y)$ e facciamo vedere che esiste un suo intorno aperto tutto contenuto in Ω. Siccome $(x; y) \notin \Delta$ si ha che $x \neq y$ e (poiché X è di Haussdorf) allora esistono due intorni aperti U_x di x e U_y di y che sono disgiunti. Il fatto che U_x e U_y siano disgiunti implica che il loro prodotto $U_x \times U_y$ non interseca Δ e il fatto che siano aperti implica che il loro prodotto è anche aperto; quindi il prodotto è un intorno aperto di $(x; y)$ tutto contenuto in Ω.

Viceversa, siano x e y due punti distinti in X e facciamo vedere che esistono due intorni disgiunti. Siccome $x \neq y$ abbiamo che $(x; y) \notin \Delta$, cioé $(x; y) \in \Omega$ che per ipotesi è un aperto. Sia quindi U un intorno aperto di $(x; y)$ contenuto in Ω; poiché i rettangoli aperti sono una base della topologia prodotto U si scrive come unione di rettangoli, sia $R = U_x \times U_y$ uno di questi rettangoli che contiene il punto $(x; y)$; gli insiemi U_x e U_y sono aperti di X, sono disgiunti perchè il loro prodotto non intersecava la diagonale e contengono rispettivamente x e y visto che il loro prodotto conteneva il punto $(x; y)$.

Problema 3. Si dimostri che $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per ogni $n \neq 2$ e $n \geq 0$.

Soluzione: Supponiamo che ci sia un omeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$. Fissato un punto $O \in \mathbb{R}^2$ abbiamo che la restrizione di ϕ, $\phi' : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{\phi(O)\}$ deve ancora essere un omeomorfismo; questo però è assurdo perché il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ è $\mathbb{Z}$ (perché è omotopo ad S^1) mentre il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^n \setminus \phi\{O\}$ è banale, qualunque sia il punto $\phi(O)$.

Per convincersi di quest'ultimo fatto, sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n \setminus \{\phi(O)\}$ un cappio qualunque e sia C il cono di vertice $\phi(O)$ e base $\gamma(I)$, ovvero l'unione di tutte le rette che congiungono $\phi(O)$ con un qualsiasi punto dell'arco γ; se $n > 2$ il cono C non riempie tutto $\mathbb{R}^n$ e possiamo quindi prendere un punto P non appartenente a C. Per costuzione il segmento che unisce P ad un qualunque punto di γ non contiene il punto $\phi(O)$, quindi la funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & I \times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \setminus \{\phi(O)\} \\ & (t, s) & \longmapsto & s\gamma(t) + (1-s)P \end{array}$$

è ben definita ed è un'omotopia tra il cappio γ ed il cappio costante in P.

Problema 4. Si esibiscano due superfici (2-varietà topologiche) non omeomorfe, non semplicemente connesse, e aventi lo stesso gruppo fondamentale.

Soluzione: Un esempio possibile è considerare il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ e il nastro di Möbius; entrambi sono omotopi ad S^1 e quindi hanno lo stesso gruppo fondamentale (che è $\mathbb{Z}$).

Problema 5. Vero o falso? (Giustificare le risposte)

1. Sia C una curva (1-varietà topologica) connessa. Il gruppo fondamentale di C è commutativo.

2. Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Il gruppo fondamentale di X è commutativo.

Soluzione:

1. Vero. Le uniche classi di omeomorfismo di curve connesse sono quella a cui appartiene la retta e quella cui appartiene S^1. Quindi gli unici gruppi fondamentali possibili sono $\mathbb{Z}$ e $\{0\}$, che sono entrambi abeliani.

2. Falso. un controesempio può essere dato dal piano a cui sono stati tolti due punti (distinti) o dalla "curva a otto" che sono connessi per archi e hanno come gruppo fondamentale il gruppo libero con due generatori.

Problema 6. Si dimostri che la caratteristica topologica di una superficie compatta, connessa e orientabile è sempre un numero pari.

Soluzione: Per il toerema di classificazione le uniche superfici compatte, connesse e orientabili sono i multitori gT, ottenuti tramite la somma connessa di g tori (e con la convenzione che $0T$ sia la superficie sferica S^2).

La caratteristica topologica di un multitoro è pari a $2-2g$, che è sempre un numero pari.