GE3 - TOPOLOGIA

Esercizi 1
Consegnare entro il 3 Marzo 2008

Problema 1.

Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea.
Si dimostri che ogni punto $p \in \mathbb{R}$ è chiuso.
Si dimostri che $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ è chiuso.
Si dimostri che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ non è né chiuso né aperto.

Problema 2.

Sia $a \in \mathbb{R}$ fissato e si considerino le seguenti famiglie di sottinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}_1 := \{(-\infty, a); (a, +\infty)\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{(-\infty, a]; (a, +\infty)\}$$

$$\mathcal{B}_3 := \{(-\infty, a]; [a, +\infty)\}.$$

Una sola di esse è una base per una topologia su $\mathbb{R}$; si dica quale (giustificando la risposta).
Per il resto dell'esercizio, si consideri $\mathbb{R}$ dotato della topologia appena definita.
Si dimostri che nessun punto $p \in \mathbb{R}$ è chiuso.
Si dimostri che esistono successioni che convergono ad infiniti limiti.
Si dimostri che esistono successioni che non convergono.

Problema 3.

Si consideri un insieme infinito X con la topologia cofinita.
Si dimostri che ogni punto $p \in X$ è chiuso.
Si dimostri che due aperti non vuoti hanno sempre intersezione non vuota.
Si dimostri che ogni successione fatta di infiniti termini distinti ammette infiniti limiti.