Esercizi 1 - Soluzioni

corso di GE3

A.A. 2007/2008

Problema 1. Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

1. Si dimostri che ogni punto $p \in \mathbb{R}$ è chiuso.
2. Si dimostri che $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ è chiuso.
3. Si dimostri che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ non è nè chiuso nè aperto.

Soluzione:

1. Per fare vedere che l'insieme $\{p\}$ è chiuso occorre provare che il suo complementare è aperto e gli aperti della topologia euclidea sono le unioni di dischi, quindi occorre scrivere $(-\infty, p) \cup (p, \infty)$ come unione di dischi. Un modo di farlo è:

$$(-\infty, p) \cup (p, \infty) = \bigcup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{p\}} D_{d(x,p)}(x)$$

   dove d indica la distanza. Questa uguaglianza è vera perché ogni punto diverso da p compare come centro di un disco, quindi appartiene a quel disco e di conseguenza appartiene all'unione; viceversa tutti questi dischi sono contenuti nel complementare di $\{p\}$ (non contengono p) perché per tutti gli x considerati la distanza tra x e p non è mai strettamente minore di se stessa.

2. È evidente che il complementare di $\mathbb{Z}$ si scrive come:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$$

   e gli intervalli $(n, n+1)$ sono dischi: il centro è $n + \frac{1}{2}$ e il raggio è $\frac{1}{2}$.

3. Questa proposizione è molto più debole che non conoscere l'interno, l'esterno e la frontiera di $\mathbb{Q}$ o anche la sua densità; per questo non useremo direttamente nessuna di queste cose.

   L'insieme $\mathbb{Q}$ non può essere aperto, poiché, siccome che tutti i dischi hanno cardinalità superiore al numerabile, tutti gli aperti non vuoti della topologia euclidea hanno cardinalità superiore al numerabile mentre $\mathbb{Q}$ non la ha. Nemmeno $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ può contenere dishi, e quindi non può essere aperto; infatti se $D_r(x)$ è un qualsiasi disco esistono degli elementi di $\mathbb{Q}$ tra $x - r$ e $x + r$ per il principio di Archimede (tra due reali c'è sempre un razionale e viceversa).

Problema 2.

1. Sia $a \in \mathbb{R}$ fissato e si considerino le seguenti famiglie di sottinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}_1 := \{(-\infty, a); (a, +\infty)\}$$
$$\mathcal{B}_2 := \{(-\infty, a]; (a, +\infty)\}$$
$$\mathcal{B}_3 := \{(-\infty, a]; [a, +\infty)\}.$$

   Una sola di esse è una base per una topologia su $\mathbb{R}$; si dica quale (giustificando la risposta). Per il resto dell'esercizio, si consideri $\mathbb{R}$ dotato della topologia appena definita.

2. Si dimostri che nessun punto $p \in \mathbb{R}$ è chiuso.

3. Si dimostri che esistono successioni che convergono ad infiniti limiti.

4. Si dimostri che esistono successioni che non convergono.

Soluzione:

1. Un insieme di sottoinsiemi di un'insieme X è una base di una topologia su X se e solo se rispetta due condizioni:

   (a) L'unione di tutti i suoi elementi è X

   (b) L'intersezione di due suoi elementi si può scrivere come unione dei suoi elementi.

   L'insieme $\mathcal{B}_1$ non rispetta la prima condizione mentre l'insieme $\mathcal{B}_3$ non rispetta la seconda, dal momento che $(-\infty, a] \cap [a, +\infty) = \{a\}$ è un insieme finito mentre tutti gli elementi di $\mathcal{B}_3$ sono infiniti e quindi questa intersezione non si può scrivere come loro unione.

   L'insieme $\mathcal{B}_2$ rispetta entrambe le condizioni. L'unione dei suoi due elementi da $\mathbb{R}$ e l'intersezione di due suoi elementi distinti è vuota, ed il vuoto è una unione lecita di elementi di $\mathcal{B}_2$.

2. Per ogni punto $p \in \mathbb{R}$, l'insieme $\{p\}$ non è chiuso perché il suo complementare, $\mathbb{R} \setminus \{p\}$, non è aperto. Infatti gli aperti della topologia indotta da $\mathcal{B}_2$ sono solo quattro: $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $(-\infty, a]$ e (a, ∞) e $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ non è nessuno di questi.

3. Esistono molti esempi. Consideriamo la successione costante uguale ad a; siamo nel caso, molto peculiare, in cui X ha un sistema fondamentale di intorni costituito da un unico aperto e in cui questo aperto, $(-\infty, a]$, è lo stesso per tutti gli $x \leq a$; per questo motivo possiamo verificare la convergenza a tutti gli x siffatti prendendo in esame solo questo aperto. L'aperto $(-\infty, a]$ contiene tutti gli elementi della successione, quindi tutti i punti $x \leq a$ sono limiti di essa.

4. Prendiamo la successione $a_n := a + (-1)^n$; dobbiamo considerare tutti i punti di $\mathbb{R}$ e verificare che nessuno di essi è un limite. Se $x > a$ l'insieme (a, ∞) è un suo intorno, quindi x sarebbe un limite solo se (a, ∞) contenesse definitivamente tutti i termini della successione. Per ogni $\overline{n} > 0$ esiste un numero dispari m maggiore di $\overline{n}$ e $a_m = a - 1 \notin (a, \infty)$ che quindi non

contiene tutti i punti da $\overline{n}$ in poi. Per questo motivo nessuno dei punti maggiori di a è un limite per la successione; rimangono da vedere quelli minori o uguali ad a. Se $x \leq a$ l'insieme $(-\infty, a]$ è un suo intorno, quindi x sarebbe un limite solo se $(-\infty, a]$ contenesse definitivamente tutti i termini della successione. Per ogni $\overline{n} > 0$ esiste un numero pari m maggiore di $\overline{n}$ e $a_m = a + 1 \notin (-\infty, a]$, che quindi non contiene tutti i punti da $\overline{n}$ in poi. Quindi la successione non ha limiti.

Problema 3. Si consideri un insieme infinito X con la topologia cofinita.

1. Si dimostri che ogni punto $p \in X$ è chiuso.
2. Si dimostri che due aperti non vuoti hanno sempre intersezione non vuota.
3. Si dimostri che ogni successione fatta di infiniti termini distinti ammette infiniti limiti.

Soluzione

1. I chiusi della topologia cofinita sono gli insiemi finiti e l'intero insieme X. $\{p\}$ è un insieme finito, quindi è chiuso.
2. Siano A_1 e A_2 due aperti non vuoti. I loro complementari sono due chiusi diversi dall'intero insieme X e quindi finiti, che indicheremo con C_1 e C_2.

   $$A_1 \cap A_2 = X \setminus (X \setminus (A_1 \cap A_2)) = X \setminus (X \setminus A_1 \cup X \setminus A_2) = X \setminus (C_1 \cup C_2).$$

   L'insieme $C_1 \cup C_2$ è un insieme finito mentre X è infinito, quindi ci sono degli elementi in $X \setminus (C_1 \cup C_2)$.
3. Sia $\{a_n\}$ una successione siffatta. Preso un qualsiasi $x \in \mathbb{R}$, x non è un limite della successione se esiste un suo intorno che non contiene definitivamente la successione; gli intorni di x sono insiemi il cui complementare è finito quindi, siccome gli elementi della succesisone non si possono ripetere, solo un numero finito di termini della successione possono essere non contenuti nell'intorno. Segue che la successione è definitivamente contenuta in ogni intorno di x per tutti gli x, che sono infiniti.

   NOTA: è importante supporre non solo che la successione assuma infiniti valori distinti ma anche che non ci possano essere termini che si ripetono un numero infinito di volte. Se questo accade la successione può avere per limite solo il termine che viene ripetuto infinite volte e se ce ne sono due o più non ha alcun limite.