Esercizi 2 - Soluzioni

corso di GE3

A.A. 2007/2008

Problema 1. Per ogni $X \in \mathbb{R}^2$ ed $r > 0$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$N_r(X) := \{y \in \mathbb{R}^2 / |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| < r\}$$

è un quadrato aperto con le diagonali parallele agli assi.

Dimostrare che la famiglia

$$\mathcal{D}_2 := \{N_r(X)/x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$$

è una base per la topologia euclidea.

Soluzione: Occorre dimostare che i quadrati sono aperti e che ogni aperto euclideo si puó scrivere come unione di quadrati. Utilizzeremo if fatto che, detta d la distanza euclidea,

$$d(x,y) \leq |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \leq \sqrt{2} d(x,y).$$

Preso un quadrato $N_r(x)$, per ogni punto $y \in N_r(x)$ scelgo $s := \frac{r}{\sqrt{2}} - d(x,y)$; $s > 0$ perché $y \in N_r(x)$). Dico che $D_s(y) \subseteq N_r(x)$: infatti per ogni $z \in D_s(y)$ si ha che $d(y,z) \leq s = \frac{r}{\sqrt{2}} - d(x,y)$ e quindi $\sqrt{2}(d(y,z) + d(x,y)) \leq r$; utilizzando questa disuguaglianza e la disuguaglianza triangolare si ha che

$$|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \leq \sqrt{2} d(x,z) \leq \sqrt{2}\,(d(y,z) + d(x,y)) \leq r$$

quindi $z \in N_r(x)$.

Poiché $d(x,y) \leq |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$, si ha che per ogni punto x e $r > 0$, $N_r(x) \subseteq D_r(x)$. Per ogni aperto euclideo U e per ogni punto $x \in U$ scegliamo un disco $D_{r_x}(x) \subseteq U$. L'aperto U si puó scrivere come

$$U = \bigcup_{x \in U} D_{r_x}(x) = \bigcup_{x \in U} N_{r_x}(x)$$

L'ultima unione è contenuta in U perché tutti i quadrati di cui si fa l'unione lo sono e U è contenuto nell'unione perché ogni suo punto é presente almeno nel quadrato di cui è centro. Quindi ogni aperto si scrive come unione di quadrati.

Problema 2. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione di un insieme X in uno spazio topologico Y con topologia $\mathcal{T}$. Dimostrare che:

1. La famiglia di sottoinsiemi di X $f^{-1}(\mathcal{T}) := \{f^{-1}(A)/A \in \mathcal{T}\}$ è una topologia su X
2. Considerando X dotato di questa topologia, l'applicazione f è continua.

3. Se $\mathcal{T}'$ è un'altra topologia su X per cui f è continua, allora $\mathcal{T}' \succeq f^{-1}(\mathcal{T})$

Soluzione:

1. Verifichiamo le tre proprietá che deve soddisfare una topologia:
   (a) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ e $\emptyset \in \mathcal{T}$, quindi $\emptyset \in f^{-1}(\mathcal{T})$. Analogamente $X = f^{-1}(Y)$ e $Y \in \mathcal{T}$, quindi $X \in f^{-1}(\mathcal{T})$.
   (b) Per ogni famiglia $\left\{f^{-1}(A_i)\right\}_{i\in I}$ di elementi di $f^{-1}(\mathcal{T})$ si ha che
   $$\bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$$
   e $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$, quindi $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \in f^{-1}(\mathcal{T})$.
   (c) Per ogni due aperti $f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2)$ si ha che $f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \cap A_2)$ e $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$, quindi $f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) \in f^{-1}(\mathcal{T})$.

2. f è continua perhé, per costruzione, la retroimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di X.

3. Presa una topologia $\mathcal{T}'$ siffatta, siccome f è continua abbiamo che le retroimmagini di tutti gli aperti di Y, cioè tutti gli elementi di $f^{-1}(\mathcal{T})$, appartengono a $\mathcal{T}'$. Quindi $\mathcal{T}'$ è piú fine di $f^{-1}(\mathcal{T})$.

Problema 3. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione di uno spazio topologico X con topologia $\mathcal{T}$ in un insieme Y. Dimostrare che:

1. La famiglia di sottoinsiemi di Y $f_*(\mathcal{T}) := \left\{A \subseteq Y / f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\right\}$ è una topologia su Y

2. Considerando Y dotato di questa topologia, l'applicazione f è continua.

3. Se $\mathcal{T}'$ è un'altra topologia su Y per cui f è continua, allora $\mathcal{T}' \preceq f_*(\mathcal{T})$

Soluzione:

1. Verifichiamo le tre proprietá che deve soddisfare una topologia:
   (a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$, quindi $\emptyset \in f_*(\mathcal{T})$. Analogamente $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T}$, quindi $Y \in f_*(\mathcal{T})$.
   (b) Per ogni famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ di elementi di $f_*(\mathcal{T})$ si ha che
   $$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$
   e $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \in \mathcal{T}$ dal momento che ciascun insieme $f^{-1}(A_i)$ e $\mathcal{T}$ è chiusa rispetto all'unione. Quindi $\bigcup_{i\in I} A_i \in f_*(\mathcal{T})$.
   (c) Per ogni due elementi A_1 e A_2 di $F_*(\mathcal{T})$, si ha che $f^{-1}(A_1 \cap A_2) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) \in \mathcal{T}$ poichè $f^{-1}(A_1)$ e $f^{-1}(A_2)$ sono in $\mathcal{T}$ ed essa è chiusa rispetto all'intersezione finita. Quindi $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

2. f è continua perhé, per costruzione, la retroimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di X.

3. Presa una topologia $\mathcal{T}'$ siffatta, siccome f è continua abbiamo che le retroimmagini di tutti i suoi elementi, appartengono a $F_*(\mathcal{T})$. Quindi $\mathcal{T}'$ è meno fine di $f_*(\mathcal{T})$.

Problema 4. Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X e $\chi_S : X \to \mathbb{R}$ l'applicazione caratteristica di S, ovvero

$$\chi_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{se } x \notin S \end{cases}$$

Dimostrare che χ_S è continua in un punto x se e solo se $x \notin \mathrm{Fr}(S)$.

Soluzione: Supponiamo che χ_S sia continua in x. Se $\chi_S(x) = 0$ prendiamo un intorno N di 0 che non contenga 1; tale in torno esiste sempre perchè $\mathbb{R}$ è uno spazio di Haussdorf. Siccome χ_S è continua abbiamo che $M := \chi_S^{-1}(N)$ è un aperto e x vi appartiene poichè la sua immagine è in N, dunque M è un intorno aperto di x e, per la scelta di N, $\chi_S(M) \subseteq N$ quindi tutti i punti di M devono avere immagine 0, ossia $M \subseteq X \setminus S$. Se ne deduce che x è un punto esterno e quindi non di frontiera. Se invece $\chi_S(x) = 1$ scegliamo questa volta un intorno N di 1 che no contenga 0. Per gli stessi motivi l'insieme $M : +\chi_s^{-1}(N)$ sarà un intorno aperto di x i cui punti hanno tutti immagine 1, ossia sono contenuti in S, rendendo x un punto interno e quindi, anche in questo caso, non di frontiera.

Viceversa supponiamo di avere un punto x che sia di frontiera per S; l'intorno di $\chi_S(x)$ $(\chi_S(x) - \frac{1}{2}, \chi_S(x) + \frac{1}{2})$ non puó contenere sia 0 che 1 ma un qualsiasi intorno M di x contiene sia punti in S che punti non contenuti in S, ossia sia punti la cui immagine è 1 che punti la cui immagine è 0. Se ne deduce che esiste un intorno di $\chi_S(x)$ che non contiene l'immagine di alcun intorno M di x, quindi χ_S non è continua in x.

Problema 5. Dimostrare che se X_1 e X_2 sono spazi topologici l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \sigma & X_1 \times X_2 & \to & X_2 \times X_1 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & (x_2, x_1) \end{array}$$

è un'omeomorfismo. il sistema fondamentale di intorni di *Soluzione* Dimostriamo che σ è un'applicazione continua, biunivoca e aperta. Consideriamo in ciascun prodotto la base della topologia data dai rettangoli; tutte queste proprietá possono essere verificate solo sugli aperti di una base, quindi le verificheremo solo sui rettangoli e non per tutti gli aperti.

σ è continua perché, preso un qualunque rettangolo aperto della base $U_2 \times U_1$ si ha che $\sigma^{-1}(U_2 \times U_1) = U_1 \times U_2$ che è un elemento della base della topologia prodotto di $X_1 \times X_2$, e quindi aperto.

σ è aperta perchè, preso un qualunque rettangolo aperto della base $U_1 \times U_2$, si ha che $\sigma(U_1 \times U_2) = U_2 \times U_1$ che è un elemento della base della topologia prodotto di $X_2 \times X_1$, e quindi aperto.

σ è suriettiva perchè per ogni $(x_2, x_1) \in X_2 \times X_1$ esiste il punto $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ la cui immagine secondo σ è (x_2, x_1).

σ è iniettiva perchè se $\sigma(x_1, x_2) = \sigma(y_1, y_2)$ si ha che $(x_2, x_1) = (y_2, y_1)$ e quindi $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$.

Problema 6. Sia X uno spazio metrizzabile. Dimostrare che la distanza $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è un'applicazione continua per la topologia prodotto.

Soluzione Usiamo la definizione locale di continuitá: facciamo vedere cha d è continua in tutti i punti. Per ogni punto $(x, y) \in X \times X$, sia r la distanza tra x e y. Prendiamo la base locale in r data da $\{(r - 2\epsilon, r + 2\epsilon)\}_{\epsilon \in \mathbb{R}^+}$ e facciamo vedere che per ogni ϵ esiste un intorno del punto (x, y) la cui immagine è contenuta in $(r - 2\epsilon, r + 2\epsilon)$.

Siano $U_1 := D_\epsilon(x)$ e $U_2 := D_\epsilon(y)$. Per ogni punto $(x', y') \in U_1 \times U_2$ abbiamo che

$$d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y, y') \leq \epsilon + r + \epsilon = r + 2\epsilon$$

allo stesso modo

$$d(x', y') \geq d(x, y') - d(x', x) \geq d(x, y) - d(y, y') - d(x, x') = r - 2\epsilon$$

quindi d è continua.