GE3 - TOPOLOGIA

Esercizi 3

Consegnare entro il 19 Marzo 2008

Esercizio 1. Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea e $Y \subset \mathbb{R}$ definito come segue

$$Y = [-1, +1] = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| \leq 1\}.$$

Sia Y dotato della topologia relativa (indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$). Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di Y, si dica se è o non è aperto giustificando la risposta.

$A = \{x : \frac{1}{2} < x < 1\}$

$B = \{x : \frac{1}{2} < x \leq 1\}$

$C = \{x : \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$

$D = \{x : 0 < x \leq 1, \quad x \neq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

$E = \{x : 0 \leq x \leq 1, \quad x \neq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

Esercizio 2. Si dimostrino le seguenti (a), (b) e (c).
(a) Se S e T sono sottoinsiemi di uno stesso spazio topologico, allora

$$\overline{S} \cup \overline{T} = \overline{S \cup T}$$

(2) Se I è un insieme infinito di indici e, per ogni $i \in I$, S_i è un sottoinsieme di uno spazio topologico fissato X, allora

$$\bigcup_{i \in I} \overline{S_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} S_i}$$

(c) Con la stessa notazione di 2.b, si dimostri che l'affermazione

$$\bigcup_{i \in I} \overline{S_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} S_i}$$

è falsa in generale.

Esercizio 3.
Sia X uno spazio topologico e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in X. Si supponga che X converge a due punti distinti di X.

Vero o falso: X non è di Hausdorff.
Vero o falso: X non è T_1.
(Dimostrare le risposte).