

Corso di Topologia di base della Professoressa Caporaso

Tutorato I del 25 – 02 – 2008

Tutore: Gabriele Nocco

<http://www.matematica3.com>

Esercizio 1

Sia \mathcal{B} la famiglia di intervalli aperti di \mathbb{R} della forma

$$(x - q, x + q)$$

dove x e q sono razionali e $q > 0$. Verificare che grazie a \mathcal{B} , \mathbb{R} con la topologia euclidea soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

Generalizzare lo stesso procedimento per \mathbb{R}^2 e per \mathbb{R}^n .

Esercizio 2

Notare che un insieme infinito non numerabile dotato della topologia discreta soddisfa il primo assioma di numerabilità, ma non soddisfa il secondo.

Dare un altro esempio di spazio topologico in cui vale il primo assioma di numerabilità ma non il secondo.

Esercizio 3

Far vedere:

1. che l'insieme $(a, b]$ non è aperto e non è chiuso.
2. interno, frontiera e derivato di un insieme finito su \mathbb{R} rispetto alla topologia euclidea.
3. interno, frontiera e derivato di un intervallo $(a, b]$ con $a < b$ su \mathbb{R} rispetto alla topologia euclidea e rispetto alla cofinita.
4. le condizioni necessarie affinché una successione in \mathbb{R} forma un insieme chiuso per la topologia euclidea (suggerimento: pensare al suo derivato).
5. interno, frontiera e derivato di \mathbb{Q}

Esercizio 4

Definire la chiusura di un disco in uno spazio metrico e dedurne dove sia contenuta la sua frontiera.

Esercizio 5

Dimostrare che uno spazio topologico banale con almeno due elementi non è metrizzabile.