Corso di Topologia di base della Professoressa Caporaso

Soluzioni del tutorato II del $3 - 03 - 2008$

Tutore: Gabriele Nocco

http://www.matematica3.com

Esercizio 1

Dimostrare con esempi che l'unione di una famiglia infinita di sottoinsiemi chiusi di uno spazio topologico non è in generale un sottoinsieme chiuso.

Soluzione

Basta prendere $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita, se prendiamo ogni punto di $\mathbb{N}$ come chiuso, e ne facciamo l'unione su tutto $\mathbb{N}$ abbiamo che l'unione stessa non sarà più un chiuso.

Esercizio 2

Dimostrare che dati due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico X si ha:

1. $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$
2. $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$
3. $Int(A \cup B) \supset Int(A) \cup Int(B)$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Trovare esempi in cui le inclusioni precedenti sono strette.

Soluzione

Dimostriamo il primo, gli altri si faranno allo stesso modo.
$\forall x \in Fr(A \cup B)$ allora esiste V intorno di x tale che $V \cap (A \cup B)$ é diverso dall'insieme vuoto cosí come $V \cap (A \cup B)^c$.
Ora peró $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. A questo punto $y \in (A \cup B) \cap V$ allora $y \in A$ oppure $y \in B$. Mettiamo che $y \in A$, allora $V \cap A$ e $V \cap A^c$ sono diversi dall'insieme vuoto, quindi $x \in Fr(A)$, si procede allo stesso modo se $y \in B$.
Ora per arbitrarietá di x si ha l'inclusione.
Suggerimento: per gli ultimi due esercizi pensare ai primi applicati a A^c e B^c.

Esercizio 3

Definiamo una sottobase di una topologia $\mathcal{T}$ sull'insieme X come una famiglia $\mathcal{S}$ di insiemi aperti tale che la famiglia

$$\mathcal{B} = \{U_1 \cap U_2 \cdots \cap U_n \ : \ U_i \in \mathcal{S}\},$$

costruita da tutte le intersezioni di un numero finito di elementi di $\mathcal{S}$ sia una base di $\mathcal{T}$.
Siano X e Y due spazi topologici e $f : X \to Y$ una applicazione. Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{B}$ rispettivamente una sottobase e una base della topologia di Y. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è continua.
2. $f^{-1}(B)$ è aperto in X $\forall B \in \mathcal{B}$.
3. $f^{-1}(S)$ è aperto in X $\forall S \in \mathcal{S}$.
4. $f(\overline{V}) \subset \overline{f(V)}$ per ogni sottoinsieme V di X.
5. $f^{-1}(\overline{W}) \supset \overline{f^{-1}(W)}$ per ogni sottoinsieme W di Y.

Soluzione

Schemi dimostrativi per lo piú visti a lezione.

Esercizio 4

Siano X uno spazio topologico, $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ applicazioni continue e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che le seguenti applicazioni sono continue:

$f + g : X \to \mathbb{R}^n$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
$\alpha f : X \to \mathbb{R}^n$	$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$;
$\\|f\\| : X \to \mathbb{R}$	$\\|f\\|(x) = \\|f(x)\\|$.

Soluzione

Dimostriamo il primo: insiemisticamente si ha proprio che $(f+g)^{-1}(U)$ per U aperto in $\mathbb{R}^n$ é l'unione di $f^{-1}(U)$ con $g^{-1}(U)$, che sono aperti in X.

Esercizio 5 **(Facoltativo)**
Prendere due oggetti di uso quotidiano, associare a ognuno una topologia e definire una applicazione tra i due oggetti verificandone la continuità.