Corso di Topologia di base della Professoressa Caporaso

Tutorato III del $10 - 03 - 2008$

Tutore: Gabriele Nocco

http://www.matematica3.com

Esercizio 1

Se X è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$, con $m < n$, allora $X \times \mathbb{R}^{n-m}$ si dice il cilindro di base X.
In quest'ottica considerare lo spazio:

$$Y := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\}.$$

Soluzione

Il cilindro Y a questo punto sará lo spazio prodotto ottenuto da $S^1 \times \mathbb{R}$, e i suoi aperti saranno quelli indotti come il prodotto di aperti di S^1 per quelli di $\mathbb{R}$.

Esercizio 2

Il prodotto di n copie di S^1 si chiama toro n-dimensionale, o n-toro, e si denota con T^n. Ovviamente poichè $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ si ha che $T^n \subset \mathbb{R}^{2n}$.
Il 2-toro é omeomorfa al sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$T^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1 = {x_3}^2 + {x_4}^2\}$$

Verificare che le applicazioni

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1 + 2)x_3, (x_1 + 2)x_4, x_2)$$

e

$$g(y_1, y_2, y_3) = (\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2} - 2, y_3, \frac{y_1}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}})$$

sono omeomorfismi tra T^2 e $T = \{(x_1, x_2, x_3) | (\sqrt{{x_1}^2 + x_2} - 2)^2 + {x_3}^2 = 1\}$.

Soluzione
Calcoli svolti nelle lezioni tenute dal Dott. M. Nesci.

Esercizio 3

Dimostrare che se X_1 e X_2 sono due spazi topologici allora l'applicazione

$$\sigma : X_1 \times X_2 \to X_2 \times X_1$$

definita da $\sigma(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ é un omeomorfismo.

Soluzione

Prendiamo un aperto U di $X_2 \times X_1$ e facciamo vedere che $\sigma^{-1}(U)$ é un aperto in $X_1 \times X_2$. Questo tuttavia é ovvio, perché $U = U_2 \times U_1$ con U_i aperto di X_i, ora peró σ^{-1} non fa altro che scambiare l'ordine del prodotto, facendo diventare la preimmagine di U: $U_1 \times U_2$, che è aperto nel dominio.

Esercizio 4

Sia X uno spazio metrizzabile. Dimostrare che la distanza $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é una applicazione continua rispetto la topologia prodotto.

Soluzione

Esercizio dato per casa.

Esercizio 5

Dimostrare che essere T_1 (rispettivamente T_2, regolare, normale) é una proprietá topologica per uno spazio X.

Soluzione

Proviamo che essere T_1 é una proprietá topologica. Se X e Y sono due spazi omeomorfi, poniamo che Y sia T_1, allora i punti sono chiusi, ma se i due spazi sono omeomorfi, esiste una applicazione biettiva f che é continua con inversa continua. Per la biettivitá di f si ha che la preimmagine di un punto é un punto, e per la continuitá si ha che il punto in X é chiuso, quindi anche X é T_1. Con lo stesso ragionamento si svolge per l'essere T_2, T_3 e T_4.

Esercizio 6

Dimostrare che un insieme infinito con la topologia cofinita non é metrizzabile.

Soluzione

Esercizio dato per casa.