Corso di Topologia di base della Professoressa Caporaso

Tutorato IV del $17 - 03 - 2008$

Tutore: Gabriele Nocco

http://www.matematica3.com

Esercizio 1

Dimostrare che uno spazio quoziente di uno spazio X é uno spazio T_1 se e solo se ogni classe di equivalenza é un sottoinsieme chiuso di X

Soluzione
Dalla definizione di spazio topologico quoziente si ha immediatamente che i punti di questo spazio sono le classi di equivalenza dello spazio di partenza rispetto a una data relazione. Da questo segue immediatamente dalla definizione di T_1 il se e solo se.

Esercizio 2

I seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n, n > 1$, non sono compatti:

1. $\mathbf{D}^n \setminus \{0\}$
2. $\mathbf{S}^n \setminus \{(1, 0, \cdots, 0)\}$
3. $\{x \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$
4. $Int(\mathbf{I}^n)$

Soluzione
Il primo, il secondo e il quarto non sono compatti non essendo chiusi, il terzo non é limitato.

Esercizio 3

Siano $a < b$ numeri reali. Dimostrare che $X = [a, b] \cap \mathbb{Q}$ non é compatto trovandone un ricoprimento aperto che non possiede un sottoricoprimento finito.

Soluzione

Poniamo a e b irrazionali, se cosí non fosse allora possiamo trovare un aperto centrato nell'estremo tale che il bordo di questo aperto sia un numero irrazionale, aggiungendolo al ricoprimento aperto e ci resterebbe solo da ricoprire un intervallo con bordo irrazionale. A questo punto $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ é uguale a $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ che a questo punto non puó essere compatto. Quindi un semplice ricoprimento di aperti che non ha sottoricoprimento finito, unito agli aperti serviti per restringere il bordo, ci porta a concludere l'esercizio.

Esercizio 4

Dimostrare che ognuno dei seguenti spazi topologici per $n > 0$:

1. $\mathbf{I}^n$
2. $\mathbf{S}^{n-1}$
3. Δ^n
4. $\mathbf{D}^n$

non é omeomorfo ad alcuno dei seguenti per $n > 0$:

1. $\mathbb{R}^n$
2. $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{I}^n$
3. $\mathbb{R}^n \setminus \Delta^n$
4. $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{S}^{n-1}$
5. $Int(\mathbf{I}^n)$
6. $Int(\Delta^n)$

Soluzione

Essendo la compattezza una proprietá topologica basta notare che tutti gli insiemi del primo gruppo sono compatti, contrariamente a quelli del secondo gruppo.

Esercizio 4
Provare a dare quattro esempi di applicazioni tra due spazi, da uno compatto a uno non compatto, tale che non siano rispettivamente iniettiva, suriettiva, continua e con inversa continua.