

**Corso di Topologia di base della Professoressa Caporaso**

Tutorato V del 31 – 03 – 2008

Tutore: Gabriele Nocco

<http://www.matematica3.com>

**Esercizio 1**

Dimostrare che l'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  é sconnesso.

**Esercizio 2**

Riconoscere quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  sono sconnessi:

1.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \neq 0\}$
2.  $\{(x, y) : -1 \leq x, y \leq 1\} \setminus \{(0, y) : y \text{ irrazionale}\}$
3.  $A := D_1(1, 0) \cup D_1(-1, 0)$
4.  $\bar{A}$
5.  $A \cup \{(0, 0)\}$

**Esercizio 3**

Dimostrare che l'unione delle circonferenza di centro  $\{(0, 0)\}$  e raggio razionale  $r \leq 1$  é un sottoinsieme sconnesso di  $\mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 4**

Sia  $X \subset \mathbb{R}^2$  l'unione di due circonferenze di raggio uno e centri in  $\{(-1, 0)\}$  e  $\{(1, 0)\}$  rispettivamente, tangenti nell'origine.  
Dimostrare che:

1.  $X$  non é omeomorfo a  $S^1$
2.  $X$  non é omeomorfo a  $I$

**Esercizio 4**

$S^n := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$  Esiste un  $n$  tale che  $S^n$  é uno spazio sconnesso?

(Suggerimento:  $S^2$  lo é? e  $S^1$ ?)