1. Sia Y uno spazio topologico. Una applicazione continua $f : S^1 \to Y$ è omotopa a un'applicazione costante se e solo se f si estende ad una applicazione $g : D^2 \to Y$.

   Soluzione: v. Sernesi, Cap. 3, Esempio 13.2.2.

2. Dimostrare che la superficie sferica $S^(n-1)$ e $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sono omotopi per ogni $n \geq 1$.

   Soluzione: Vedi Sernesi, Cap. 3 Esempio 13.4.

3. Sia X uno spazio topologico T1. Dimostrare che X è regolare se e solo se per ogni punto $x \in X$ e per ogni intorno U di x esiste un intorno V di X tale che $\overline{V} \subseteq U$.

   Soluzione: Se X è regolare, supponiamo che l'intorno U sia aperto e consideriamo il chiuso $B := X \setminus U$. Per ipotesi, esistono insiemi aperti disgiunti V e W con $x \in V$ e $B \subseteq W$. Siccome V e W sono disgiunti, $X \setminus W$, che è un chiuso, contiene V e quindi la sua chiusura; dunque $\overline{V} \cap W = \emptyset$ e a maggior ragione $\overline{V} \cap B = \emptyset$, ovvero $\overline{V} \subseteq U$.

   Viceversa, siano dati un punto x ed un chiuso B che non lo contiene. Sia $U := X \setminus B$; per ipotesi c'è un intorno V di x la cui chiusura è contenuta in U, dunque V e $X \setminus \overline{V}$ sono due aperti disgiunti che contengono rispettivamente x e B.

4. Sia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di spazi topologici regolari. Dimostrare che $X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ è regolare.

   Soluzione: Utilizziamo il criterio dato dall'esercizio precedente. Il prodotto topologico di un qualunque numero di spazi T2 è ancora T2 e quindi T1.

   Sia $x = (x_\alpha)$ un punto del prodotto e sia U un qualsiasi intorno di x. U deve contenere un elemento della base della topologia prodotto che ciamiamo $\prod_\alpha U_\alpha$ che contenga x. Per ogni α, sia $V_\alpha := X_\alpha$ se $U_\alpha = X_\alpha$; per gli α per cui U_α è un aperto proprio scegliamo un intorno aperto V_α di x_α la cui chiusura sia contenuta in U_α.

   Allora $V := \prod_\alpha V_\alpha$ è un intorno di x e $\overline{V} = \prod_\alpha \overline{V_\alpha} \subseteq \prod_\alpha U_\alpha \subseteq U$. Dunque il criterio è soddisfatto e X è regolare.