GE3 - TOPOLOGIA
Esame finale 2
18 Luglio 2007

Problema 1.

In $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea si denoti X_n la sfera di centro $(0,0,n)$ e raggio $\frac{1}{2}$, dove $n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ è un numero naturale (dunque $X_n \approx S^2$).
1.a Sia
$$X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$
X è compatto?
X è connesso per archi?
1.b Sia
$$Y := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$$
Y è compatto?
Y è connesso per archi?

Problema 2. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, si consideri la successione $\{x_n\}$, definita come segue:
$$x_n = (\cos n\pi, \sin \frac{n^3\pi}{n^4+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
2.a Questa successione è convergente? Perchè?
2.b Questa successione ammette una sottosuccessione convergente? Perché?

Problema 3. Sia dia un esempio di spazio topologico il cui gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ (si giustifichi la risposta).

Problema 4. Siano X, X_1 e X_2 spazi topologici connessi per archi. Vero o falso:

4.a Se X è contraibile, allora $\pi_1(X) = \{1\}$.

4.b Se $\pi_1(X_1) = \pi_1(X_2) = \{1\}$, allora $\pi_1(X_1 \times X_2) = \{1\}$.

4.c Se $\pi_1(X_1) = \pi_1(X_2) = \{1\}$ e $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, allora $\pi_1(X_1 \cup X_2) = \{1\}$.

Problema 5. Si calcoli la caratteristica topologica $\chi(S)$ degli spazi seguenti:

5.a $S = S^2\#S^2$ è la somma connessa di due sfere.
5.b $S = T\#S^2$ è la somma connessa di un toro e una sfera.
5.c $S = T\#P^2$ è la somma connessa di un toro e un piano proiettivo.

Problema 6 In questo problema si considera sempre la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$.
6.a Sia $p \in \mathbb{R}^3$ un punto qualsiasi. Si calcoli il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$.
6.b Si dimostri che $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^3$.